

微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第5回 ('16年11月16日：Keywords・・・極値)

5-1. 全微分・・・2変数関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で全微分可能であるとは、ランダウの記号を用いて、

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \alpha h + \beta k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

が成り立つような α, β が存在することである．一変数のときの微分可能性は、

$$f(a+h) = f(a) + \alpha h + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

となるような h が存在することである．全微分可能であれば、偏微分可能であり $\alpha = f_x$ かつ $\beta = f_y$ である．これは、 $(a, b, f(a, b))$ においてグラフ上に接平面が存在することと同値である．

(例) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ が原点で全微分可能でないことを示す． $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ であるから、 $g(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y = f(x, y)$ は、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|g(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0$ であればよい．今、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(h, h)|}{\sqrt{h^2 + h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(h, h)|}{\sqrt{2}|h|} = 2^{-\frac{3}{2}}$ となり全微分可能でない．

5-2. 陰関数の定理・・・ $F(x, y)$ を C^1 級関数とする． $F(x, y) = 0$ を満たす点 $x_0 = (x_0, y_0)$ が $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ を満たすなら、ある ϵ が存在して、 x_0 の ϵ -近傍において、 $F(x, y) = 0$ を満たす陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する．つまり、その領域において、 $F(x, \varphi(x)) = 0$ を満たす．

(例) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ としたとき、 $F(x, y) = 0$ を満たす集合が $y = \varphi(x)$ とした陰関数 (つまり、 $F(x, \varphi(x)) = 0$) が存在するための x の条件を求めよ．

5-3. 微分係数・・・関数 $F(x, y) = 0$ が (x_0, y_0) において、陰関数が存在するとき、その陰関数を $y = \varphi(x)$ とすると、 (x_0, y_0) の近くの $F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) で、

$$\varphi'(x) = -F_x(x, y)/F_y(x, y)$$

と計算でき、2階微分は、 $\varphi''(x) = -(F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2)/F_y^3$ となる．

5-4. 陰関数の接線および法線の方程式・・・ $F(x, y)$ が C^1 級であるとする．このとき、 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ であるなら、 $F(x, y) = 0$ を満たす集合の (x_0, y_0) での接線の方程式は $F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0$ となり、また、法線の方程式は、 $F_x(x_0, y_0)(y - y_0) - F_y(x_0, y_0)(x - x_0) = 0$ となる．

5-5. 特異点・・・ $F(x, y) = 0$ を満たす集合のうち、陰関数が存在しない条件 $F_x(x, y) = 0$ かつ $F_y(x, y) = 0$ を満たす点のことを特異点という．

学籍番号

氏名

例題 5-1. (全微分可能・陰関数の定理)

(1) 次の関数が全微分可能かどうか調べよ .

$$(1) f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(2) f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(2) 次の関数 $F(x, y)$ において、関係式 $F(x, y) = 0$ を x を変数とする陰関数 $y = \varphi(x)$ として局所的に解くことができる点 (x_0, y_0) の条件を求めよ .

$$(a) F(x, y) = x^3 + 3xy + y^5 - x + 1$$

$$(b) F(x, y) = x^2 - xy + y^3 - 7$$

例題 5-2. (陰関数の接線法線・陰関数定理)

- (1) 等式 $F(x, y) = 0$ がある点 (x_0, y_0) の周りで、陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在するとする．このとき、合成関数の微分を用いることで、

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

となることを示せ．

- (2) 方程式 $F(x, y) = 3x^2 - xy^2 + 2xy + y - x = 0$ の点 $(1, 2)$ における接線、法線の方程式を求めよ．またこの方程式の零点に特異点はあるか？

学籍番号

氏名

問題 5-1. (全微分)

(1) 次の関数 $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}}$ は $n = 1$ のとき、全微分可能であるが、 $n = 2$ のとき、全微分可能でないことを示せ .

(2) $F(x, y) = 0$ を満たす陰関数 $y = \varphi(x)$ の 2 回微分は、

$$\varphi''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

と計算できることを示せ .

問題 5-2. (陰関数の接線法線・極値問題)

- (1) つぎの方程式 $F(x, y) = xe^{2y} - e^{xy} + \sin(\pi xy) + y$ の点 $(0, 1)$ における接線、法線の方程式を求めよ .
- (2) 体積一定となる直方体のうち、表面積が最小となるものを求めよ .