

微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第6回 ('16年12月7日：Keywords・・・条件付き極値・ラグランジュの未定乗数法)

6-1. ラグランジュの未定乗数法・・・条件 $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) において関数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の極値を下のようにして求める方法である．このとき、 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ とすると、

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

とおくと、 $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ の条件のもとでの F の極値において、 H の臨界点を与える．

(例) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ なる条件のもと、 $3x^2 + xy + 3y^2$ を最大にする点を求めよ．

$$H = 3x^2 + xy + 3y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \text{ とおく．このとき、} \begin{cases} H_x = (6 - 2\lambda)x + y = 0 \\ H_y = x + (6 - 2\lambda)y = 0 \\ H_\lambda = -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

ここで、 $(x, y) \neq (0, 0)$ なので、 $(6 - 2\lambda)(6 - 2\lambda) - 1 = 0$ を満たすので、

$\lambda = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ である．

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{5}{2} \text{ のとき、} \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} & \text{ となる．よって、} (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \lambda = \frac{7}{2} \text{ のとき、} \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} & \text{ となる．よって、} (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

6-2. 集合上の最大値・・・ A, B を $\mathbb{R}^2$ 上の集合とし、 $A \cup B$ が有界な閉集合とする． $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき、 $A \cup B$ 上で、 $f(x, y)$ の最大値、最小値が存在する．

(1) f の A での最大値があればそれを a

(2) f の B での最大値があればそれを b

とするとき、 f の $A \cup B$ での最大値は

$$\max\{a, b\}$$

として与えられる．

6-3. 円盤上の最大値・・・ $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす領域において、 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ と $B = \{x^2 + y^2 = 1\}$ とするとき、連続関数 $f(x, y)$ の最大値は、 A での最大値と B での最大値のうち大きい方である．最小についても同じ．

(例) $x^2 + y^2 \leq 1$ のときに、 $f(x, y) = xy$ を満たす最大最小を求めよ．

円盤の内点において、 $f(x, y)$ の臨界点は、 $(0, 0)$ のみであるが、 $\det(H) = -1 < 0$ なので、極値ではない．よって、円盤の内部において最大最小は存在しない． $x^2 + y^2 = 1$ を満たす領域において、 $H = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ に対してラグランジュの未定乗数法を用いることで、 $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

が極値の条件となる．このとき、 $f(x, y)$ に入れてると、それぞれ、 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ となり、最大値は $\frac{1}{2}$ であり、最小値は $-\frac{1}{2}$ となる．ゆえに、この円盤の最小値と最大値も、それぞれ $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ となる．

学籍番号

氏名

例題 6-1. (ラグランジュの未定乗数法)

- (1) $x^2 + y^2 = 1$ なる条件のもと、 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ で臨界点となる x, y を求めよ .
- (2) $x^2 + xy + y^2 = 1$ なる条件のもと、 $f(x, y) = x^2 + y^2$ で臨界点となる x, y を求めよ .

例題 6-2. (円盤上の最大値と最小値)

円盤 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ において、 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ の最大と最小を求める .

- (1) $x^2 + y^2 < 1$ において、 $f(x, y)$ の極値をとる (x, y) とその値 $f(x, y)$ を求めよ .
- (2) $x^2 + y^2 = 1$ において、 $f(x, y)$ の極値をとる $f(x, y)$ とその値 $f(x, y)$ を求めよ .
また、それが最大、最小であることを判定せよ .

学籍番号

氏名

問題 6-1. (ラグランジュの未定乗数法)

$x^2 + 2y^2 = 1$ の条件のもと、 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ を最大、最小にする (x, y) を以下のようにして求める。

- (1) ラグランジュの未定乗数法を用いるため、 λ を用いて、条件の式、 $f(x, y)$ の一次結合を用いた式 $H(x, y, \lambda)$ を求めよ。
- (2) H の臨界点 H_x, H_y, H_λ の満たす条件を求めよ。
- (3) (2) の満たす x, y, λ を求めよ。
- (4) 上の条件のもと、 $f(x, y)$ を最大、もしくは、最小にする (x, y) を求めよ。
- (5) (感想)

問題 6-2. (円盤上の最大最小)

円盤 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ において、 $f(x, y) = x^2 - y + y^2$ の最大と最小を求める .

- (1) $x^2 + y^2 < 1$ において、 $f(x, y)$ の極値をとる (x, y) とその値 $f(x, y)$ を求める .
 $f(x, y)$ の x, y に関する偏微分が全て 0 になる点を求めよ .
- (2) その点のヘッシアンから、その点が極値であるかどうか、判定せよ .
- (3) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ として、 $f(x, y)$ の最大、最小をラグランジュの未定乗数法を用いて求める . $H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ として、 $H(x, y, \lambda)$ の x, y, λ に関する偏微分をすべて 0 にする (x, y, λ) を求めよ .
- (4) (3) で求めた (x, y, λ) において $f(x, y)$ を求め、 $f(x, y)$ の最大、最小を求めよ .
- (5) (2) で求めた極値と、(4) で求めた最大最小を見比べることで、円盤上の最大最小となる点とその値をそれぞれ求めよ .