

微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第7回 ('16年12月14日：Keywords・・・積分)

7-1. 三角形領域・四角形領域上での重積分・・・ $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ を長方形領域という．この D 上での重積分は、次のように類似積分に直して計算する．

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

$$(\text{例}) \int \int_{[0,1] \times [0,1]} xy dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y dy = \frac{1}{4}$$

このように、変数が分離した場合の長方形領域上の積分は、 $\int \int_{[0,1] \times [0,1]} xy dx dy =$

$$\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \int_0^1 y dy \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ として計算できる.}$$

$T = \left\{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq \frac{d-c}{b-a}x - \frac{ad-bc}{b-a} \right\}$ を三角形領域 $((a, c), (b, c), (b, d))$ が3角形の頂点) という．この T 上での重積分は、次のように類似積分に直して計算する．

$$\int \int_T f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{x_0}^b f(x, y) dx \right) dy$$

ここで、 $x_0 = \frac{b-a}{d-c}y + \frac{ad-bc}{d-c}$ とする．

$$(\text{例}) \int_0^1 \int_y^1 xy dx dy = \int_0^1 \int_y^1 xy dx dy = \int_0^1 \frac{y(1-y^2)}{2} dy = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

7-2. 関数行列式 (ヤコビ行列式、ヤコビアン)・・・ $x = \varphi(s, t), y = \psi(s, t)$ に対して、もしくは $x = \varphi(s, t, u), y = \psi(s, t, u), z = \phi(s, t, u)$ に対して、

$$\begin{pmatrix} \varphi_s & \varphi_t \\ \psi_s & \psi_t \end{pmatrix}, \text{ もしくは } \begin{pmatrix} \varphi_s & \varphi_t & \varphi_u \\ \psi_s & \psi_t & \psi_u \\ \phi_s & \phi_t & \phi_u \end{pmatrix}$$

なる行列の行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ もしくは $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)}$ を関数行列式 (ヤコビ行列式、ヤコビアン) をいう．

(例) $x = uv, y = u^2 - v^2$ となる変換のヤコビ行列式は、 $\det \begin{pmatrix} v & u \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = -2v^2 - 2u^2$ となる．

7-3. 変数変換・・・ φ を $\mathbb{R}$ 内の領域 D を $\varphi(D)$ に一対一に写すとき、 $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ とする．このとき、

$$\int \int_{\varphi(D)} f(x, y) dx dy = \int \int_D f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

φ によって一点に写された写された集合がジョルダン外測度0集合であってもこの公式は成り立つ．

(例) $(x, y) = (u + v, -u + v)$ なる座標変換に対して、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 2, |x - y| \leq 2\}$ とすると、ヤコビ行列は、 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (u^2 + v^2) 2 du dv = 8 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

となる .

学籍番号

氏名

例題 7-1. (長方形領域、三角形領域)

$$(1) \int \int_D (x + 2y)^2 dx dy, \quad D = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$(2) \int \int_D \frac{dx dy}{(1 + x + y)^2}, \quad D = [1, 3] \times [0, 2]$$

$$(3) \int \int_T x(x + y) dx dy, \quad T \text{ を } (0, 0), (1, 0), (0, 2) \text{ を頂点とする三角形領域.}$$

$$(4) \int \int_T (x + 2y) dx dy, \quad T \text{ を } (0, 0), (1, 1), (1, 0) \text{ を頂点とする三角形領域}$$

例題 7-2. (ヤコビアン・積分の順序)

(1) 次の変換のヤコビアンを計算せよ .

(a) $(u, v) \mapsto (u^2 + v^2, 2uv)$

(b) $(u, v) \mapsto (u + 2v, 3u + v)$

(2) 次の積分の順序を交換せよ .

(a) $\int_0^3 \left(\int_{y-3}^{2y} f(x, y) dx \right) dy$

(b) $\int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{y}}^y f(x, y) dx \right) dy$

学籍番号

氏名

問題 7-1. (重積分)

- (1) D を $1 \leq x \leq 2, 1/x \leq y \leq x$ で囲まれる部分の領域とする．このとき、 $\int \int_D x^2 y dx dy$ の重積分を求めよ．
- (2) T を $(0, 0), (\pi, \pi), (\pi, -\pi)$ を頂点とする三角形領域とする．
このとき、 $\int \int_T x^2 \sin(y - x) dx dy$ を以下のようにして、2 通り計算せよ．
- (a) まず、 x 方向から積分してから、 y 方向の積分をする．
- (b) まず、 y 方向から積分してから、 x 方向の積分をする．

問題 7-2. (変数変換による積分)

変数変換を使って、以下の積分を計算する .

$$\begin{cases} D = \{(x, y) \mid |x + 2y| \leq 1, |x - y| \leq 1\} \\ \int \int_D (x - y)^2 dx dy \end{cases}$$

- (1) $x + 2y = u, x - y = v$ において、 (u, v) から (x, y) への一次変換を作れ .
- (2) その一次変換のヤコビアンを計算せよ .
- (3) その変換を用いて、 $\int \int_D (x - y)^2 dx dy$ を u, v の積分に書き直せ .
- (4) (3) の積分を実行せよ .