微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第8回 ('16年12月21日：Keywords ⋯ 円盤上の積分)

8-1. 極座標による円盤上の積分 ⋯

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

となる極座標変換のとき、このヤコビアンは r となる．よって、極座標変換により、x, y-平面上の領域 D は r, θ-平面上の E に移るとすると、

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

となる．

(例)$\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\int_{0\le r\le 1, 0\le\theta<2\pi} r\cdot rdrd\theta = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2 d\theta dr = 2\pi\int_0^1 r^2 dr = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$

8-2. 立体の体積 ⋯ 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して、その D 上で、2 変数関数 $z = f(x,y)$ と x, y-平面とで囲まれた 3 次元領域の体積は、

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

によって求めることができる．(例)$f(x,y) = x^2+y^2$ と $x^2+y^2 \le 1$ となる領域において x, y-平面で囲まれた領域の体積は

$\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2 rdrd\theta = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

微積分 II 演習 第 8 回

2016 年 12 月 21 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

例題 8-1. (円盤領域上の積分)

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とした時の、ヤコビ行列、ヤコビアンを定義から計算せよ.

(2) 次の積分を計算せよ.

(a) $\displaystyle\int\int_D x dx dy,\quad D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$

(b) $\displaystyle\int\int_D x^2 dx dy,\quad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le x\}$

(c) $\displaystyle\int\int_D x(x+y) dx dy$
$D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

$\boxed{\textbf{例題 8-2.}}$ (極座標変換)

次の積分

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

を２通りの積分を実行する.

(1) $x = (\tan\theta)y$ として x の積分を実行し、そのあと y の積分を実行せよ.

(2) $y = (\tan\theta)x$ と $x = 1$ との交点を求めよ.

(3) 極座標変換を用いて積分を求めよ.

微積分 II 演習 第 8 回

提出 2016 年 12 月 28 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 8-1. (円盤上の積分と球面の体積)

(1) 次の積分を求めよ.

$$\int_D x^2 y dx dy, \quad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$$

(2) ３次元の極座標表示は

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

で与えられる．このとき、以下の問題に答えよ.

(a) ３次元の極座標表示によるヤコビアンを計算せよ.

(b) 半球 $z \geq 0$ は θ, φ のどのような領域と一致するか？

(c) 半球面は x, y-平面より上で関数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 以下の領域の体積であることから、半球と x, y 平面で囲まれる体積を重積分を使って求めよ.

問題 8-2. (円盤上の積分)

$\displaystyle\int\int_{x^2+y^2<2ax}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ の積分を求める.

(1) 円 $x^2+y^2=2ax$ と $y=(\tan\theta)x$ との交点を求めよ.

(2) 領域 $x^2+y^2\leq 2ax$ は、極座標表示において、r,θ においてどのような領域と一致するか？

(3) 上の積分を求めよ.