微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 9 回 ('16 年 12 月 28 日：Keywords $\cdots$ 復習)

9-1. ガンマ関数 $\cdots$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

として定義する．次の性質が満たされる．

(1) $\Gamma(x) > 0, \Gamma(1) = 1$

(2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$．特に n が整数とするとき、$\Gamma(n+1) = n!$

(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

9-2. ベータ関数 $\cdots$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0)$$

として定義される．次の性質が満たされる．

(1) $B(p,q) = B(q,p)$

(2) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

9-3. 極座標 $\cdots$ n 次元の極座標は、回転体の座標を繰り返しとることで、以下のように得られる．

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \cdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

微積分 II 演習 第 9 回

2016 年 12 月 28 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

例題 9-1. (積分)

(1) 次の積分はどこが間違っているか指摘し、正しい答えを書け.

(a) D を $0 \le x \le 2$ かつ $-x \le y \le x$ で囲まれる領域とする．このとき、重積分

$$\int\int_D (x^2 - y^2) dxdy$$

を求めよ.

(答)$D = [0,2] \times [-x, x]$ であり、

$\displaystyle\int_{-x}^{x}\int_0^2 (x^2 - y^2) dxdy = \int_{-x}^{x}\left[\frac{x^3}{3} - y^2 x\right]_0^2 dy = \int_{-x}^{x}(\frac{8}{3} - 2y^2) dy = \left[\frac{8}{3}y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-x}^{x} =$

$\displaystyle\frac{8}{3}2x - \frac{2}{3}(x^3 + x^3) = \frac{16}{3}x - \frac{4x^3}{3}$

(b) $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, -x \le y \le x\}$ とする.

$$\int\int_D x^2(y^2 + y + 1) dxdy$$

を求めよ.

(答) $\displaystyle\int\int_D x^2(y^2 + y + 1) dxdy = 2\int_0^1\int_0^x x^2(y^2 + y + 1) dydx =$

$\displaystyle 2\int_0^1 \left[x^2(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y)\right]_0^x = 2\int_0^1 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x^4}{2} + x^3)\right) dx = \left[\frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2}\right]_0^1 =$

$\displaystyle\frac{10 \cdot 1 + 18 \cdot 1 + 45 \cdot 1}{90} = \frac{73}{90}$

例題 9-2. (積分)

(1) D を下の点を頂点とする三角形領域のとき、関数 $z = f(x,y)$ を D 上で積分せよ.

(1) $(0,0),(1,0),(0,2),\ f(x,y)=xy$　　(2) $(0,0),(1,1),(1,0),\ f(x,y)=x+2y$

(2) D を下のような円盤領域のとき、関数 $z=f(x,y)$ を D 上で積分せよ.

(a) $\displaystyle\int\int_D x^2dxdy,\quad D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$

(b) $\displaystyle\int\int_D xdxdy,\quad D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leq 1\}$

微積分 II 演習 第 9 回

提出締め切り 2016 年 1 月 18 日 (13:50 まで)

学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

問題 9-1. (積分について)

(1) 次の命題が正しいか、正しくないか判定せよ．正しくない場合は、反例、または正しい解答をかけ．正しい場合は「正しい」のみで良く証明する必要はない．

(a) 重積分の領域が線対称である形であれば、関数の形に関係なく、対称線によって分けられた一方の積分の 2 倍になる．

(b) 正の値をとる 2 変数関数上の任意の領域の積分値は必ず正の数になる．

(c) 変数変換をしたとき、ヤコビアンは絶対値をとって正の数にしなければならない．

(d) $[1,2]\times[-x,x]$ は正方形領域であるか？それとも、台形領域を意味するか？

(2) 次の関数の領域 $D=\{(x,y)|e^{-x}\le y\le e^{x}, 0\le x\le 1\}$ における積分

$$\int\int_D x\log y dxdy$$

を計算せよ．

(a) 領域の図をえがけ．

(b) どちらの変数から積分すれば良いかよく考え、この積分を累次積分の形に直せ．

(c) 積分を実行せよ．

問題 9-2. (積分)

(1) 次の重積分

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1}(a^2x^2+b^2y^2)dxdy = \frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$$

を示せ.

(2) 原点、$(0,1),(1,0)$ を頂点とする三角形を D とする．このとき、次の積分を求めよ.

$$\int\int_D (x-y)^2 e^{(x+y)^2}dxdy$$