

**第1回** ('16年4月13日 : Keywords ... 論理記号、集合、上限、下限)

## 今日の話.

1. 論理記号 . 2. 集合の書き方 . 3. 上限・下限

1. 論理記号  $\forall$  任意の .  $\exists$  ある ... が存在する .**問題-1-A.**次の命題を  $\forall$  と  $\exists$  を用いて表せ .

- (1) 任意の実数  $x$  に対して  $x^2 \geq 0$  が成り立つ .
- (2)  $x$  を満たす  $x^2 \geq 100$  が存在する .
- (3) 任意の偶数  $n$  は、ある整数  $m$  が存在して  $n = 2m$  となる .
- (4) 任意の実数  $y$  に対して、 $y = x^3$  となる実数  $x$  が存在する .

2. 集合の書き方  $A = \{x \in X | x \text{ の満たす条件} \}$ .3. 元と部分集合 集合の要素のことを元という .  $x$  が  $S$  の元であることを、

$$x \in S \quad (S \ni x)$$

とかく . ある集合  $T$  に対して、 $\forall x \in T$  ならば  $x \in S$  となるとき、 $T$  は  $S$  の部分集合といい、

$$T \subset S \quad (S \supset T)$$

と表す . この2つを混同する人が多い .

## 4. 集合の演算・等式

 $\forall x \in A$  を満たすなら  $x \in B$  を満たすとき、 $A$  は  $B$  の部分集合といい、 $A \subset B$  もしくは、 $B \supset A$  とかく .部分集合  $A \subset X$  に対して、 $\{x \in X | x \notin A\}$  を  $A^c$  とかき、 $A$  の補集合という .部分集合  $A, B \subset X$  に対して、以下の演算を定義する .

- $A \cup B = \{x \in X | x \in A \text{ または } x \in B\}$  (和集合) .
- $A \cap B = \{x \in X | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$  (共通集合) .
- $A \setminus B = A \cap B^c$  (差集合)

集合として  $A = B$  であることは、 $A \subset B$  かつ  $B \subset A$  と同値である .5. 数の集合  $\mathbb{N}$  (自然数)  $\mathbb{Z}$  (整数)  $\mathbb{Q}$  (有理数)  $\mathbb{R}$  (実数) $\mathbb{C}$  (複素数)  $\mathbb{H}$  (ハミルトンの四元数)

**問題-1-B.**

次の文章を集合の言葉で表せ．

- (1) 31 以下の素数の集合．
- (2)  $(x, y)$  平面上の点で、 $x, y$  のいずれも整数の点の集合．
- (3) 2 次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  が異なる 2 つの正の実数解をもつための  $(a, b)$  の満たす集合．
- (4) 偶数全体の集合のうち 3 で割って 2 あまり、7 で割って 5 あまる整数

**問題-1-C.**

次の文章を集合の言葉で表せ．

- (1) 原点を中心として半径が 1 の単位円
- (2)  $(1, 0)$  と、 $(0, 2)$  から等距離にある集合．

$\mathbb{Z}$  を整数全体からなる集合とする．このとき、以下を事柄、もしくは問題の答えを数学の記号  $\in$  や  $\subset$  などを用いて表せ． $m$  で割り切れる整数全体の部分集合を  $I_m$  と書くことにする．

- (1)  $I_m$  を集合の言葉でかけ．
- (2) 3 と 4 は  $\mathbb{Z}$  の元である．
- (3)  $I_6$  の元は  $I_3$  の元に含まれる（つまり部分集合である）．
- (4)  $I_{10}$  の元は、 $I_2$  と  $I_5$  の共通集合に含まれる．
- (5)  $24 \in \mathbb{Z}$  において、24 はどの  $I_n$  に含まれるか？

**6. 否定・逆・裏・対偶 命題に関する論理関係．**

否定 … 「 $A$  である」の否定は、 である． $A$  の否定を  $\bar{A}$  とかく．

$A \Rightarrow B$  に対して、

逆 …  となる命題  
 裏 …  となる命題  
 対偶 …  となる命題

**問題-1-D.**

次の命題の逆、裏、対偶をいえ．

- (1) 2 次関数ならば連続である．
- (2) お客様ならば神様である．

7. 必要条件・十分条件  $A \Rightarrow B$  が成り立つとき、 $A$  のことを十分条件といい、 $B$  のことを必要条件という。必要かつ十分な条件を必要十分条件という。

**問題-1-E.**

次の条件は必要条件、十分条件、必要十分条件のうちどれか？

- (1)  $x^2 = 4$  は  $x = 2$  であるための  条件。
- (2)  $x > 2$  となる実数は  $x > 4$  となる実数であるための、 条件。
- (3)  $|x| + |y| \leq 1$  は  $x^2 + y^2 \leq 1$  であるための  条件。

8. 上界・下界（上限・下限） 実数の部分集合  $A \subset \mathbb{R}$  の上（下）界  $M \in \mathbb{R}$  とは、 $\forall a \in A$  に対して  $\exists M$  に対して  $a \leq M$  ( $M \leq a$ ) が成り立つときをいう。上（下）界が存在するとき、 $A$  は上に（下に）有界という。上に有界かつ下に有界のとき、単に有界という。  
 $A$  の上界（下界）のうち最小（最大）のものを上限（下限）といい  $\sup(A)$  ( $\inf(A)$ ) と表す。

**問題-1-F.**

- (1) 2次関数  $y = ax^2$  の上界、下界は存在するか？上に有界であるか？下に有界であるか？
- (2) 次の関数  $y = 1/(x^2 + 1)$  (の値域) は有界であることを示せ。またその上限、下限を求めよ。
- (3) 次の数列の上限を求めよ。  $\left\{3 - \frac{1}{n}\right\}$
- (4)  $\left\{\frac{1 - (-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$  は有界な数列であるか？もしそうなら、上限下限を求めよ。
- (5) 次の数列が収束することを示し、その極限を求めよ。

$$a_1 < 1, a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$$

- (6) 有界な定義域上の連続関数で、微分係数が有界であれば、有界な関数といえるか？
-

### 宿題-1-1. [論理]

次の問題に答えよ.

(1) 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  が満たす条件を求めよ.

$\forall x$  に対して  $f(x) > 0$  となる.

$\exists x$  に対して  $f(x) > 0$  となる.

(2) 実数上の関数  $y = f(x)$  が単調増加であることを論理記号を用いて記せ.

### 宿題-1-2. [集合・証明]

$n, m$  を互いに素な整数とする.  $I_n \cap I_m$  と  $I_{nm}$  は集合として一致することを示せ.

### 宿題-1-3. [微分]

微分はこの授業では導入されていませんが、高校の範囲での微分を思い出してください.  $y = f(x)$  を以下のような関数とする. このとき、 $f(x)$  を 1, 2, 3, ... 回それぞれ微分したものに 0 を代入したものはどのような数列になるか? 比べてみよ.

(1)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 1$

(2)  $f(x) = \sin x$

**質問・その他** 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください.

---

ホームページ: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog: (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB

(blog など更新情報などその他) 相談、質問などいつでも承ります. アドレスはプリント1ページ目上部.