

第10回 ('16年6月29日：Keywords・・・三角関数の積分、広義積分)**今日の課題.**

1. 三角関数の有理式の積分計算. 2. 広義積分が定義から計算できること.

34. 部分分数分解についての注 $f(x)$ を多項式として、 $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ のような分数は、必ず、

$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(x-a)^k}$ のような分解を持ちます. a_k はある実数です. なので、分解した後の形として、 $\frac{2x+1}{(x-1)^3}$ のようなものは考える必要はありません. この場合、 $\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$ として、分子が定数の形に変えることができます.

また、分母が虚数解を持つ $x^2 + ax + b$ のような場合は、実数としての部分分数分解は

$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$$

のような分解が最小です. 積分を実行する時は、平方完成して $\frac{A'X+B'}{X^2+1}$ の形に帰着させた後、さらに $\frac{A'}{2} \frac{2X}{X^2+1} + \frac{B'}{X^2+1}$ のように変形をして、前者は $\frac{A'}{2} \log(X^2+1)$ となり、後者は $B' \arctan(X)$ となります.

問題-10-A.

以下の不定積分を計算せよ.

(1) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

(2) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

(3) $\int \sqrt{(1+x^2)^3} dx$

(4) $\int (x + \sqrt{1+x^2}) dx$

(5) $\int \sqrt{x^2+x+1} dx$

(6) $\int \sqrt{x^2+x-2} dx$

(7) $\int \frac{x+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$

(8) $\int \frac{4x+5}{(x+1)^2} dx$

(9) $\int \frac{2x^2+3}{(x+1)^3} dx$

(10) $\int \frac{3x^3+6x^2+3x}{(x+1)^3} dx$

(11) $\int \frac{3x^3+6x^2+3x}{(x+1)^3} dx$

(12) $\int \frac{3x^2-3}{(x+1)^2(x-2)} dx$

35. 三角関数の有理式の積分 $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ を多項式 $f(x,y), g(x,y)$ の商として得られる式として、 $\frac{f(\sin s, \cos s)}{g(\sin s, \cos s)}$ の形の積分は、 $t = \tan \frac{s}{2}$ とおくことで、必ず、 t の有理式の形に帰着させることができる。

$$dt = \frac{ds}{2 \cos^2 \frac{s}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{s}{2} \right) ds = \frac{1}{2} (1 + t^2) ds$$

となり、 $ds = \frac{2dt}{1+t^2}$ が成り立つ。また、

$$\sin s = 2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2} = 2 \tan \frac{s}{2} \cos^2 \frac{s}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos s = 2 \cos^2 \frac{s}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

問題-10-B.

以下の定積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \tan x}{1 + \tan x} dx$$

$$(9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + 1)(\cos x + 1)} dx$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + 1)^2} dx$$

$$(11) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x + 1} dx$$

$$(12) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(\sin x + 1)(1 - \cos x)} dx$$

$$(13) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + 3} dx$$

$$(14) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{15}}{\cos x + 4} dx$$

$$(15) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + 2}$$

36. 広義積分 広義積分とは、無限区間の積分や、(半)開区間上の定積分のことである。広義積分が発散することもあり、収束するかどうかをまず判定する必要がある。計算方法は、積分計算と極限操作の合成により行える。例えば、 $f(x)$ が $[0, \infty)$ 上で定義できたとして、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすと、この無限区間での積分は、

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [F(x)]_a^b$$

として計算でき、同じように、半開区間 $[a, b)$ 上で定義された関数 $f(x)$ の積分は、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b} [F(x)]_a^c$$

として計算する。

問題-10-C.

以下の広義積分が収束するとして、広義積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(3) \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

$$(4) \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$(5) \int_0^\infty x e^{-x} dx$$

$$(6) \int_0^\infty \frac{x dx}{x^3 + 1}$$

$$(7) \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$(8) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(9) \int_0^\infty x \log x dx$$

宿題-10-1. [定積分の計算]

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 - \sin x}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{2 - \sin x}$$

宿題-10-2. [広義積分の計算]

次の広義積分が収束するとして、積分計算をせよ。

$$(1) \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$(2) \int_0^1 (\log x)^2 dx$$

宿題-10-3. [積分計算からある極限]

$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とおく. 次の問題について答えよ.

- (1) S_n の満たす漸化式を求めよ.
- (2) S_{2n}, S_{2n+1} を階乗など用いて n の式にせよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}$ を求めよ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(S_{2n+1})^2$ を求めよ.
- (5) これらを応用して、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}$ の値を求めよ.

質問・その他 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください.

ホームページ: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog: (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB

(blog など更新情報などその他)

ランダウの記号について

(http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html)

質問コーナー

(質問など部屋 B715 にて受け付けます. 月曜 PM3 時まで、火曜 PM4 時半まで. 事前要相談)

手習い塾

(1H205. 火曜 PM4:45 から 6:00)