

第11回 ('16年7月6日：Keywords・・・広義積分・広義積分の収束)**今日の課題.**

1. 広義積分の収束の判定ができること .

37. 広義積分の収束 広義積分が収束するとは $\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x)dx$ の極限が存在することである .

一般に、収束するかどうかを判定するには、優関数を用いる . つまり、 $|f(x)| \leq g(x)$ なる関数 $g(x)$ を用いて、 $\int_a^b g(x)dx$ が広義積分として収束するとき、 $\int_a^b f(x)dx$ も収束する .

数列のときと同様、条件としてこの絶対値はとることはできない . (簡単な例で考えればわかる .)

また、逆は成り立つとは限らない . $|f(x)| \leq g(x)$ で、 $\int_a^b g(x)dx$ が収束しないからといって、 $\int_a^b f(x)dx$ が収束しないとは限らない .

$\int_a^b |f(x)|dx$ が収束するとき、この広義積分は絶対収束するという .

38. べき関数との比較

(1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$ は $s > 1$ の場合に、収束し、 $s \leq 1$ のときに発散する .

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$ は $s < 1$ の場合に、収束し、 $s \geq 1$ のときに発散する .

問題-11-A.

以下の広義積分が収束するかどうか判定せよ .

(1) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^3}$

(2) $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} dx$

(3) $\int_1^\infty \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

(4) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1-e^x} dx$

(5) $\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x}+x^3} dx$

(6) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-e^x} dx$

(7) $\int_1^\infty e^{-x} x^2 dx$

(8) $\int_1^\infty e^{-x} x^{-3} dx$

(9) $\int_1^\infty e^{-x} x^3 dx$

(10) $\int_0^1 \frac{32}{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+1}} dx$

(11) $\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+2x+5} dx$

(12) $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx$

39. 関数のオーダーと広義積分 $f(x)$ を、 $(0, a]$ で定義される関数とし、 $f(x) = O(x^{-s})$ とする．このとき、

$$\int_0^a f(x) dx$$

は、 $s < 1$ のとき、収束する．

$f(x)$ を、 $[b, \infty)$ で定義される関数とし、 $f(x) = O(x^{-s})$ とする．このとき、

$$\int_b^\infty f(x) dx$$

は、 $s > 1$ のとき、収束する．

ここで、関数 $f(x)$ が $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow a$) であるとは、十分 a に近い任意の x において $|\frac{f(x)}{g(x)}|$ が有界であることである．

問題-11-B.

以下の広義積分の収束発散を言え．

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x}}{1 - \cos x} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$$

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + \tan x) dx$$

$$(5) \int_0^\infty \frac{2x+x^2}{e^x-1} dx$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(x^3+1)}}$$

$$(7) \int_0^1 \log x dx$$

$$(8) \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$(9) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$$

$$(11) \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(12) \int_0^1 \frac{dx}{\log x}$$

$$(13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$(14) \int_0^1 \frac{1-x}{\log x} dx$$

$$(15) \int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}$$

問題-11-C.

以下の広義積分の値を求めよ．

$$(1) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$(2) \int_0^\infty e^{-x} x^3 dx$$

$$(3) \int_0^\infty e^{-x} x^4 dx$$

$$(4) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$$

$$(5) \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$(6) \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$(7) \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx$$

$$(9) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\tan x}$$

$$(11) \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{xe^x} dx$$

$$(12) \int_0^\infty \frac{1}{1 + \sqrt{x^3}} dx$$

$$(13) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$(14) \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$(15) \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

宿題-11-1. [広義積分の収束]

次の広義積分の収束発散を言え．

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

宿題-11-2. [広義積分の計算]

次の広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \quad (*)$$

の値を求める

(1) この広義積分が収束することを優関数を用いて示せ．

(2) n を自然数とする． $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ が収束することを示せ．

(3) (2) の積分と $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ は前回の宿題の S_n のどの項と等しくなるか？

(4) $\int_0^\infty e^{-nx^2} dx$ を変数変換をして、この値を $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ と n を用いて求めよ．

(5) n を自然数とする． $(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$ を証明せよ．

(6) 以上のことと、前回の宿題 10-3 の (4) を用いることで、積分 (*) を求めよ．

質問・その他 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください．

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB

(blog など更新情報などその他)

ランダウの記号について

(http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html)

質問コーナー

(質問など部屋 B715 にて受け付けます。月曜 PM3 時まで、火曜 PM4 時半まで。事前要相談)

手習い塾

(1H205。火曜 PM4:45 から 6:00)