微積分 I 演習 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 12 回（'16 年 7 月 13 日：Keywords ··· ガンマ関数、ベータ関数、実数）

今日の課題.
1. 積分をガンマ関数とベータ関数を用いて書けるようにすること.

---

37. ガンマ関数・ベータ関数　$s > 0$ なる実数に対してガンマ関数を

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

のように定義する．この広義積分は、$s > 0$ において、収束する.

$a, b > 0$ なる実数に対して．ベータ関数 $B(a, b)$ を

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

のように定義する．$0 < a < 1$ もしくは、$0 < b < 1$ の場合、この広義積分は収束する.

ベータ関数は、ガンマ関数を用いて、

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

とかける.

問題-12-A.

以下のガンマ関数及び、ベータ関数の値を積分計算をすることで求めよ.

(1) $\Gamma(1)$　(2) $\Gamma(2)$　(3) $\Gamma(7)$

(4) $B(2, 2)$　(5) $B(3, 5)$　(6) $B(1/2, 1/2)$

(7) $B(4, 2)$　(8) $B(2, 5)$　(9) $B(3/2, 5/2)$

上記のベータ関数の等式を用いて、以下の値を求めよ．$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ は使わない.

(10) $\Gamma(1/2)$　(11) $\Gamma(3/2)$　(12) $\Gamma(5/2)$

38. ガンマ関数の等式

(1) $s > 0$ なる実数 s に対して $\Gamma(s)$ の定義の積分の形から以下の等式が成り立つ.

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$$

この等式を実数全体に拡張される関数等式とすると、$\Gamma(s)$ は実数全体上で定義される関数となる．しかし、$z = 0, -1, -2, \cdots$ では、無限大に発散するので、定義できない.

(2) 特に、$n \in \mathbb{N}$ に対して $\Gamma(n+1) = n!$

(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

(4) $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(s)$

(5) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$

問題-12-B.

次の積分をガンマ関数・ベータ関数を用いて表せ．必要であれば、上記のガンマ関数の等式を用いてもかまわない.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^3}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3dx}{1+x^5}$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^5}}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(8) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(10) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}x^7dx$

(11) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^2)^5dx$

(12) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}x^3\,dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^4\theta\,d\theta$

(14) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^6\theta\,d\theta$

(15) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$

(16) $\displaystyle\int_0^1 x^2\left(\log\frac{1}{x}\right)^2 dx$

(17) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5}\,dx$

(18) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x)^4}\,dx$

39. 実数　まず、p, q を整数として、$p \neq 0$ のとき、q/p となる形の数を有理数という．有理数のあるコーシー列 $\{a_n\}$($\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N が存在して、$n, m > N$ なる任意の n, m に対して、$|a_n - a_m| < \epsilon$ となる) の極限値 α を有理数全体に付け加える．また、有理数からなる任意の 2 つのコーシー列の差がいくらでも小さくなるとき、つまり、$\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して十分大きい n に対して、$|a_n - b_n|$ がいくらでも小さくなるとき、極限値は同じ値とする．このようにして有理数に極限値を付け加えてできる数を、**実数**という．極限値として実数全体にも絶対値が誘導される．こうしてできた実数において、任意の実数のコーシー列の極限値はただ一つ存在する．

問題-12-C.

以下の数が無理数であることを証明せよ．

(1) e　　(2) π　　(3) $\log 2$

宿題-12-1. [定積分の計算]

ガンマ関数にについて以下の問題に答えよ．

(1) $s > 0$ において広義積分 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ が収束することを示せ．

(2) n を自然数とする．次の積分をガンマ関数を用いて表し、上の関係式を用いてその値を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx$

宿題-12-2. [広義積分の計算]

次の広義積分をガンマ関数 $\Gamma(x)$ を用いて表せ．また、a, b, c は $a, b, c > 0$ なる実数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-bx^c}x^{a-1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1 - x^b)^3 dx$

宿題-12-3. [ベータ関数の等式]

次の等式を示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a\theta\cos^b\theta d\theta = B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください．

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）
ランダウの記号について
(http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html)
質問コーナー
（質問など部屋 B715 にて受け付けます．月曜 PM3 時まで、火曜 PM4 時半まで．事前要相談）
手習い塾
（1H205．火曜 PM4:45 から 6:00）