微積分 I 演習 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 13 回（'16 年 7 月 20 日：Keywords ··· パラメータを含む関数の積分）

今日の課題.
1. 積分計算をすること．2. パラメータを含む関数の積分

問題-13-A.
次の積分が広義積分可能であるか示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1-e^x}$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)}$　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(x-\frac{\pi}{2})^2\tan x}$　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x)}}$

(7) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x\,dx}{1-\cos x}$　(8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+\log x}$　(9) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

問題-13-B.
次の無理数に収束するような、すべて有理数の数列を微積分の知識を用いて作れ．答えはひとつとは限らない.

(1) π　(2) $\sqrt{3}$　(3) $\sqrt[4]{2}$

(4) $\log 5$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(6) $2^{\sqrt{2}}$

40. 積分記号下での微分　$[a,b]$ は有界区間とする．関数 $f(x,t)$ は、$x\in[a,b], t\in(\alpha,\beta)$ の 2 変数関数として、連続であるとし t に関する偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}f(x,t)$ も、$[a,b]\times(\alpha,\beta)$ において連続

であるとする．これに対して、t の関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

と定めるとき、$F(t)$ は、区間 (α,β) において一回連続微分可能であり、任意の $t \in (\alpha,\beta)$ に対して、

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx$$

が成り立つ．すなわち、微分と積分の順序交換ができる．

41. 広義積分記号下での微分　関数 $f(x,t)$ は、$x \in [a,\infty)$, $t \in (\alpha,\beta)$ の２変数関数として連続であり、t に関して偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}f(x,t)$ も $[a,\infty)\times(\alpha,\beta)$ において連続であるとする．さらに２つの条件を仮定する．

(1) 任意の $t \in (\alpha,\beta)$ に対して、x の関数として、$f(x,t)$ は、$[a,\infty)$ において、広義積分可能である．

(2) $[a,\infty)$ において、広義積分可能な（t によらない）関数 $\varphi(x)$ が存在して、任意の $t \in (\alpha,\beta)$ および、$x \in [a,\infty)$ に対して、

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right| \leq \varphi(x)$$

が成り立つ．

このとき、微分積分の順序が交換できる．すなわち、任意の $t \in (\alpha,\beta)$ に対して、次の等式が成り立つ．

$$\frac{d}{dt}\int_a^\infty f(x,t)dx = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx$$

42. パラメータを含む積分 (例題)

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$$

を考える．この積分はパラメータ t による偏微分をしても良いことを確かめた後

(i) $F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x dx$

(ii) $F'(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$

(iii) $F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(t)$

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

問題-13-C.

次の等式を示せ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-tx}dx = \frac{n!}{t^{n+1}}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^t(\log x)^n\, dx\, dx = \frac{(-1)^n n!}{(t+1)^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+t}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{t}}$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+t)^2}\, dx = \frac{\pi}{4t\sqrt{t}}$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(t+x^2)^{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}t^{\frac{-1}{2}-n}$

(6) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$

(6) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-tx^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!}{2^{2n}(n-1)!}$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos txdx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}$

(8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{t-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$

(9) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(t-\cos x)^2} = \frac{\pi t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

(10) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\cos sxdx = \frac{t}{s^2+t^2}$

問題-13-D.

次の級数展開を用いて、次の級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

宿題-13-1. [$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$ の計算]

次の積分について考える.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$$

(1) この積分が収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \log\sin x\,dx = 2I$ を示せ.

(3) 上の式に変数変換 $x = 2\phi$ をすることと、sin 関数の倍角の公式を使うことで I の値を求めよ.

宿題-13-2. [オイラー定数の収束]
オイラー定数 γ を下のような数列 c_n の極限とする.

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

このとき、γ が収束することを示せ.

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください.

ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html`
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(`http://motochans.blogspot.jp/`)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）
ランダウの記号について
(`http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html`)
質問コーナー
（質問など部屋 B715 にて受け付けます．月曜 PM3 時まで、火曜 PM4 時半まで．事前要相談）
手習い塾
（1H205．火曜 PM4:45 から 6:00）