微積分I演習 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第14回（'16年7月27日：Keywords ··· 級数・収束半径）

今日の課題.

1. 三角関数の有理式の積分計算．2. 広義積分が定義から計算できること．

---

43. べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形の級数をべき級数という．このべき級数に対して

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

として計算される量をこのべき級数の収束半径とよぶ．この R は $|z| < R$ なる任意の複素数 z に対して級数が（絶対）収束する．特にこのとき、関数項級数は一様収束する．収束半径内においては項別微積分ができ、できた級数も同じ収束半径をもつ．

また、収束半径を求めるのに、$|z| < R$ で絶対収束し、$|z| = R$ において発散するものを探してもよい．

問題-14-A.

次の級数が収束するかどうか判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$　　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$　　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n+1}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$　　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+\log n}$

44. 一様収束　関数列 $f_n(x)$ が $B \subset \mathbb{R}$ で一様収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N が存在して $n > N$ なる任意の n に対して、任意の $x \in B$ に対して $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ が成り立つ.

45. 広義（コンパクト）一様収束　関数列 $f_n(z)$ が閉領域とは限らない領域 A において、広義（コンパクト）一様収束するとは任意の有界閉集合 $B \subset A$ において、$f_n(z)$ が一様収束するということである.

46. 項別微積分　$f_n(z)$ をある領域 A 上での連続関数からなる関数項級数とする.

(1). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら $f(z)$ も A 上連続である.

(2). A において $f_n(z)$ が C^1 級関数列であり、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ が、I 上広義一様収束し、さらに、ある $z_0 \in I$ があって、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ が収束するなら $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は A で広義一様収束し、項別微分

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n(z)}{dz}$$

が成り立つ.

(3). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら、$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^z f_n(t)dt$ は A 上広義一様収束し、A 上で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt$$

が成り立つ.

問題-14-B.

つぎの関数列は $[0, 1]$ で一様収束するか？

(1) nxe^{-nx}

(2) $n^2x^n(1-x)^n$

(3) $nx(1-x)^n$

問題-14-C.

次の級数の区間 $[0, 1]$ における一様収束性を判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin(2\pi x)}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)}{n} x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^2)x^n$

問題-14-D.

次のべき級数もしくは、14-A の級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n}x^n$

問題-14-E.

$f(n)$ を多項式とする. このとき、以下の問題に答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n$ の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)z^n$ を求めよ.

(3) $f(n)$ が m 次多項式であるとする. このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n = \frac{g(z)}{(z-1)^{m+1}}$ となることを示せ.
ここで、$g(z)$ は $z-1$ で割れないある多項式.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）
ランダウの記号について
(http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html)
質問コーナー
（質問など部屋 B715 にて受け付けます．月曜 PM3 時まで、火曜 PM4 時半まで．事前要相談）
手習い塾
（1H205．火曜 PM4:45 から 6:00）