微積分 I 演習 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 15 回（'16 年 8 月 3 日：Keywords ··· 定期試験）

今日の課題.
1. 自分の力で以下の問題を解くこと.

問題-15-A.
関数の連続性について以下の問題に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることをいわゆる $\epsilon - \delta$ 論法を用いて定義せよ.
(2) (1) の定義を用いて、関数 $y = 2x^2 + x$ が $x = 0$ で連続であることを証明せよ.

(解答)
(1) 任意の正の実数 ϵ に対してある正の実数 δ が存在して、任意の $|x - a| < \delta$ となる x に対して、$|f(x) - f(a)| < \epsilon$ が成り立つ.
(2) 任意の ϵ に対して $\delta < \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3}\right\}$ とすると、$|x| < \delta$ なる任意の x に対して、

$$|f(x) - f(0)| = |2x^2 + x| \leq |x|(2|x| + 1) < 3\delta < \epsilon$$

となり、$x = 0$ での連続性が言える.

問題-15-B.
以下の値の絶対値が小さい順に並び替えよ.

$$\int_0^1 x^2 \log x\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$$

ただし、$\pi = 3.14...$ また $\log 2 = 0.6931...$ と小数展開できることを用いても良い.

(解答)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin x} = [\log(1 + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log 2$$

$$\int_0^1 x^2 \log x\, dx = \left[\frac{x^3}{3} \log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = -\frac{1}{9}$$

ここで、ロピタルの定理から $\lim_{x \to 0} x \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0}(-x) = 0$ が言える.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2t\, dt}{t^2 + t} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t + 1} = 2[\log(t + 1)]_0^1 = 2\log 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)(\cos x)' dx = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

より、各積分値の絶対値を計算すると、$\frac{1}{9} < \frac{2}{3} < \log 2 < 2\log 2$ であるから、それらが小さい順に積分を並び替えると、

$$\int_0^1 x^2 \log x\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$$

となる.

問題-15-C.

以下の積分が積分区間のいずれの端において広義積分可能であることを示し、積分を実行せよ.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

（解答）$0 < x < \dfrac{1}{2}$ のとき、

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leq 2$$

よって、$\left|\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\right| \leq \left|\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right|$ が成り立ち、$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{x}}$ は広義積分可能なので、$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ も広義積分可能.

$x = 1$ での広義積分可能性は同様なので省略する.

以下、積分値を求める．$-x^2 + x = \dfrac{1}{4} - (x - \dfrac{1}{2})^2$ となり、ここで、$x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\sin t$ とおくと、$-x^2 + x = \dfrac{1}{4}(1 - \sin^2 t) = \dfrac{\cos^2 t}{4}$、$dx = \dfrac{1}{2}\cos t dt$ となり、

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

問題-15-D.

次の関数 $y = f(x)$ の $x = 0$ でのテイラー展開 2 次の項まで求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \boldsymbol{x} \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(解答)

$f'(x) = -\dfrac{e^x x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2}$ より、ロピタルの定理を用いて $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

$f''(x) = \dfrac{e^x\,(e^x x + x - 2e^x + 2)}{(e^x - 1)^3}$ より、再びロピタルの定理を用いて $f''(0) = \dfrac{1}{6}$ となる．ゆえに、$y = f(x)$ の $x = 0$ での 2 次までのテイラー展開は、

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

となる.

問題-15-E.

次の極限を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin x(1 - \cos x)}$$

(解答)

ロピタルの定理を用いて、

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-\sin x - 2\cos x(-\sin x) + 2\sin x \cos x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 - 4\cos x} = \frac{1}{3}$$