

## 第2回 ('16年4月20日：Keywords・・・収束、数列、級数、収束判定)

### 今日の課題.

1. 収束することを言い換えること . 2. 数列および級数の収束判定をおこなうこと .

**9. 数列・関数の極限** 数列  $a_n$  がある値  $a$  に収束すること を、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  とかき、以下のよ  
うに定義する .  $\forall \epsilon > 0$  に対して、 $\exists N$  自然数において、 $\forall n > N$  なる  $n$  において、 $|a_n - a| < \epsilon$   
となる .

$f(x)$  が  $x = x_0$  で連続である とは、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  とかき、以下のように定義する  $\forall \epsilon > 0$  に  
対して、実数  $\exists \delta$  において、 $|x - x_0| < \delta$  なるすべての  $x$  において、 $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$  となる .

### 問題-2-A.

この記述法を使って、以下の数列の収束を言い換えなさい .

- (1) 数列  $a_n = 1/n$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  である .
- (2) 数列  $a_n = 1/2n$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  である .
- (3) 数列  $a_n = 1 - 1/2^n$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  である .
- (4) 関数  $\sin x$  は  $x = 0$  で連続である .

## 10. 数列の収束に関する3命題

1. 上に有界な単調増加な数列は収束する .
2. 単調増加な数列  $a_n > 0$  に対して  $a_n < b_n$  となる有界な数列  $b_n$  が存在するなら  $a_n$  は収束する .
3. 数列  $a_n$  に対して、ある発散する正項数列  $b_n$  が存在して、 $b_n \leq a_n$  となるとき、 $a_n$  も発散する .

### 問題-2-B.

この命題を用いて以下の数列の収束を示せ .

$$(1) a_n = \frac{n+1}{n^2+n+1}$$

$$(2) a_n = \log \sin \frac{1}{n^2}$$

$$(3) a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$(4) a_n = 1 + \frac{n}{2^n}$$

$$(5) a_n = n \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(6) a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

**11. 級数** 級数とは、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  のような無限和のことをいう．級数が収束するかどうかは、部分  
和  $\sum_{k=1}^n a_k$  が収束することをいう．収束性は、不等式、関数との比較、幾何級数などを用いて  
行う．

**問題-2-C.**

この命題を用いて以下の級数が収束するかどうかいえ．

$$(1) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$(2) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

$$(3) 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$(4) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

$$(5) \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt{4}} + \cdots$$

$$(6) \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

**12.  $e$  の導出** ネイピア数  $e = 2,71828\dots$  を

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

の極限として定義する．

**問題-2-D.**

以下の問題に答えよ．

- (1)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  は単調増加であることを示せ .
- (2)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  は単調減少であることを示せ .
- (3) これらの 2 つの収束先は同じであることを示せ .
- (4)  $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$  は収束するか ?
- (5)  $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$  は収束するか ?
- (6)  $n^{\frac{1}{n}}$  は、 $n$  が十分に大きいとき、単調減少であることを示せ . 微分法など使わず、不等式だけで示すことはできるか ? ヒント :  $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} / n^{\frac{1}{n}} < 1$  であることを示せ .)
- (7)  $a_n$  を  $a_n \geq n$  なる数列とする . このとき、 $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^n$  は収束することを示せ .

### 宿題-2-1. [論理]

次の級数は収束するといえるか ?

$$(1) 1 + \frac{1}{2^2!} + \frac{1}{3^3!} + \cdots .$$

$$(2) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

### 宿題-2-2. [極限]

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  は単調増加な数列であることを示せ . また、その極限を  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  の極限に帰着させることによって求めよ .

### 宿題-2-3. [上限・最大最小値]

$A = [0, 1), B = (0, 1]$  とし、 $A+B = \{x+y \in \mathbb{R} | x \in A, y \in B\}$  とする . このとき、 $\sup(A+B), \inf(A+B)$  を求めよ . また、 $A+B$  は最大値最小値は存在するか ?

**質問・その他** 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください .

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB

(blog など更新情報などその他) 相談、質問などいつでも承ります . アドレスはプリント 1 ページ目上部 .