

第3回 ('16年4月27日：Keywords $\cdots \epsilon - N$ 論法、 $\epsilon - \delta$ 論法)

今日の課題.

1. $\epsilon - N$ 論法を使って数列の収束を証明すること . 2. $\epsilon - \delta$ 論法を使って関数の連続を証明すること .

13. 数学で正しいこと 数学の全ての命題は、全て定義に戻って論理を用いて証明されなければならない . なので、教科書に書いてある事実の一つ残らず定義に戻って証明をすることが可能である .

自分の持っている正しそうな感覚だけを使って議論したりレポートを書いたりしても、それは数学ではなく、独りよがりである .

当たり前だと思っても、まずはうたぐって証明を試みることから始めてください .

14. $\epsilon - N$ -論法 数列 a_n がある値 a に収束する とは、

$\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\exists N$ 自然数において、 $\forall n > N$ なる n において、 $|a_n - a| < \epsilon$ となることである .

次のアルキメデスの原理も併用して数列の収束を証明することができる .

(アルキメデスの原理) 任意の正の実数 $M > 0$ に対して $M < N$ なる整数 N が存在する .

アルキメデスの原理も実数の定義 (公理) を使うと証明をすることができる .

(例) $a_n = 1/n$ のとき、 $a_n \rightarrow 0$ である .

(証明) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、アルキメデスの原理から、 $N > 1/\epsilon$ なる整数 N が存在する . よって、 $n > N$ なる任意の n に対して、 $|a_n - 0| < |a_N| = |1/N| < \epsilon$ となるので、数列 a_n は 0 に収束する . $\square$

問題-3-A.

次の数列を $\epsilon - N$ 論法を使って、収束を示しなさい .

(1) $a_n = 1/n$.

(2) $a_n = 1/2n$.

(3) $a_n = 1 - 1/2^n$.

(4) $a_n = 1/\sqrt{2}$

(5) $a_n = 1/\sqrt[3]{n^2}$.

(6) $a_n = n/(n+2)^2$

(7) $a_n = 1 - 1/2^n$.

(8) $a_n = (n+2)/n^2$

(9) $a_n = 1 - 3/2n$.

(10) $a_n = ne^{-n}$

(11) $a_n = 1/(n+1) - 1/n$.

(12) $a_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2}$

(13) $a_n = e^{-n} \sin n$.

(14) $a_n = e^{-n^2}$

(15) $a_n = e^{-n} \log n$.

(16) $a_n = (n+2)/n^2$

(17) $a_n = (1 - (-1)^n)/n$.

(18) $a_n = n^2 e^{-n}$

(19) $a_n = 1/n!$.

(20) $a_n = 2^n/n!$

(21) $a_n = 1/\sqrt{n!}$

問題-3-B.

$\epsilon - N$ 論法を用いて以下を示せ .

- (1) $a_n \rightarrow a$ のとき、 $a_n^2 \rightarrow a^2$ となる .
- (2) $a_n \rightarrow a$ かつ $b_n \rightarrow b$ のとき、 $a_n + b_n \rightarrow a + b$ となる .
- (3) $a_n \rightarrow a$ かつ $b_n \rightarrow b$ のとき、 $a_n b_n \rightarrow ab$ となる .
- (4) $a_n \rightarrow a$ かつ $b_n \rightarrow b \neq 0$ のとき、 $a_n/b_n \rightarrow a/b$ となる .
- (5) $a_n \rightarrow a$ のとき、 $e^{a_n} \rightarrow e^a$ となる .
- (6) $a_n \rightarrow a$ のとき、 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow a$ となる .

15. $\epsilon - \delta$ 論法 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは、
 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\exists$ 実数 δ に対して、 $|x - x_0| < \delta$ なる全ての x において、 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ となる .
 ことである .

(例) 関数 $y = 2x$ は $x = 0$ で連続である .

(証明) $\epsilon > 0$ を任意にとる . このとき、 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ とすると、

$|x - 0| < \delta$ のとき、 $|2x - 2 \cdot 0| = 2|x| < 2\delta = \epsilon$ となり、 $x = 0$ で連続である .

□

問題-3-C.

次の関数の $x = a$ での連続性を証明せよ .

- | | | |
|---------------------------------------|--|--|
| (1) $y = 2x^2, a = 1$. | (2) $y = 3x + x^2, a = 1$ | (3) $y = 5x, a = 8$. |
| (4) $y = 3x^2, a = 1$ | (5) $y = e^x, a = 2$. | (6) $y = e^x, a = 1$. |
| (7) $y = 1/x, a = 1$. | (8) $y = 1/x^2, a = 1$. | (9) $y = x^3, a = 1$. |
| (10) $y = \log x, a = 1$. | (11) $y = 1 + 1/x, a = 1$. | (12) $y = 3x^2, a = 1$. |
| (13) $y = e^{2x}, a = 1$. | (14) $y = e^{\frac{1}{x}}, a = 1$. | (15) $y = x^4, a = 1$. |
| (16) $y = x^3, a = 2$. | (17) $y = x^4, a = -2$. | (18) $y = \sqrt{x}, a = 2$. |
| (19) $y = \frac{1}{1 + x^2}, a = 1$. | (20) $y = \frac{x}{1 + x^2}, a = -1$. | (21) $y = \frac{x}{1 + \log x}, a = e$. |

宿題-3-1. [級数、数列の収束]

次の問題に答えよ．

- (1) r を $0 < r < 1$ なる実数とする．このとき、幾何級数 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ が収束することを $\epsilon - N$ 論法を用いて示せ．
- (2) 数列 a_n が収束する ことを以下のようにして定義する．

任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、
 $\forall n, \forall m > N$ に対して $|a_n - a_m| < \epsilon$ を満たす．

数列 a_n が a に収束するならば、数列 a_n が収束することを、 ϵ, δ を用いた定義に戻って示せ．

宿題-3-2. [極限]

$y = f(x)$ が連続関数であるとする． $a_n \rightarrow a$ であるとき、 $f(a_n) \rightarrow f(a)$ であることを $\epsilon - N$ 論法と $\epsilon - \delta$ 論法を用いて示せ．

宿題-3-3. [合成関数の連続性]

$f(x)$ が $x = a$ で連続であり、 $g(x)$ が $f(a)$ で連続であるとき、関数 $g \circ f(x)$ は $x = a$ で連続であることを示せ．

質問・その他 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください．

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：<http://motochans.blogspot.jp/>

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB

(blog など更新情報などその他) 相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント1ページ目上部．