

第4回 ('16年5月11日 : Keywords ... $\epsilon - \delta$ 論法、微分法)**今日の課題.**

1. $\epsilon - \delta$ 論法を使って関数の連続性を示す . 2. 関数の微分可能性について論じることができる .

16. 微分可能 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは、 $f(x)$ が次の極限が収束することである .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

また、この定義は、次のような実数 A と関数 $\varphi(x)$ が存在することと同値である .

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varphi(x)$$

ただし、関数 $\varphi(x)$ は $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$ を満たす .

問題-4-A.

次の関数 $y = f(x)$ は、各点で微分可能であるか示せ .

(1) $f(x) = 2x^2$

(2) $f(x) = |x|$

問題-4-B.

次の関数 $y = f(x)$ を微分せよ .

(1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(3) $f(x) = \frac{x}{(1+x)^x}$

(4) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

(5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\log(1+x)}}$

(6) $f(x) = \log \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

17. 逆関数 関数 $y = f(x)$ の値域 y に対して $y = f(x)$ なる値を対応させる関数を逆関数とい
い、 $f^{-1}(x)$ とかくことがある .

18. 逆三角関数

問題-4-C.

教科書 8 ページを参考に次の逆三角関数の定義域と値域をいえ．また、そのグラフを書け．

(1) $\arcsin(x)$

(2) $\arccos(x)$

(3) $\arctan(x)$

問題-4-D.

合成関数の微分法を用いて次の合成関数 $g(f(x))$ を適当な定義域の元、微分を計算せよ．

(1) $f(x) = e^{x^2}$, $g(x) = \sin x$.

(2) $f(x) = x^4 + x^2 + x - 1$, $g(x) = \sin x + \cos x$

(3) $f(x) = (1+x)^x$, $g(x) = x^2$.

(4) $f(x) = x \log x$, $g(x) = \tan x$

19. 交代級数・区間縮小法 a_n を正項級数する． $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ なる級数を交代級数という．

もし単調減少数列 a_n が $a_n \rightarrow 0$ ならば、交代級数は収束する．

問題-4-E.

(1) 任意の N において、部分和 $\sum_{k=N}^n \frac{1}{2k}$ と $\sum_{k=N}^n \frac{1}{2k-1}$ は発散することを証明せよ．

(2) $I_n = [r_n, s_n]$ を実数上の閉区間とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $I_{n+1} \subset I_n$ かつ、 $s_n - r_n \rightarrow 0$ であるならば、ある実数 α が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\alpha \in I_n$ かつ、 $r_n \rightarrow \alpha$ かつ、 $s_n \rightarrow \alpha$ となることを示せ（区間縮小法）

(3) $a_k \rightarrow 0$ なる単調減少数列の場合に交代級数がなぜ収束するのか区間縮小法を用いて証明せよ．

宿題-4-1. [微分可能]

次の関数が原点で微分可能であることを用いて、0での微分係数を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ e & x = 0 \end{cases}$$

宿題-4-2. [微分法]

次の問題に答えよ。

- (1) 合成関数の微分法を応用して、逆関数の微分法の公式を導け。
- (2) 逆関数の微分法を使って、 $\arcsin(x)$ の微分を計算せよ。
- (3) 逆関数の微分法を使って、 $\arctan(x)$ の微分を計算せよ。

宿題-4-3. [逆三角関数、逆走曲線関数]

次の等式を示せ。ただし、(逆)双曲線関数は教科書のみよ。

- (1) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
- (2) $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

宿題-4-4. [あらゆる値に収束する級数]

次の交代級数は $\log 2$ に収束する。

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

しかし、この級数の足す順番を替えることで、あらゆる実数に収束させることができることを示せ。

質問・その他 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください。

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：[\(http://motochans.blogspot.jp/\)](http://motochans.blogspot.jp/)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB

(blogなど更新情報などその他)相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント1ページ目上部。