微積分I演習 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第5回（'16 年 5 月 25 日：Keywords $\cdots$ ロピタルの定理、ランダウの記号）

今日の課題.
1. ロピタルの定理を使えるようにすること．2. ランダウの記号の意味を理解すること．

---

20. 主な関数の微分

- 三角・指数関数の微分

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x
微分	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{(\cos x)^2}$	e^x

- 双曲線関数の微分

	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
微分	$\cosh x$	$\sinh x$	$\dfrac{1}{(\cosh x)^2}$

- 逆関数の微分 ($y = f^{-1}(x)$ の x での微分．合成関数の微分から以下のように導かれる．)

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{df}{dy}(f^{-1}(x))}$$

  - 逆三角関数の微分

	Arcsin x	Arccos x	Arctan x
微分	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

  - 逆双曲線関数の微分

	$\sinh^{-1} x$	$\cosh^{-1} x$	$\tanh^{-1} x$
微分	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

- 対数微分

$$f'(x) = f(x)(\log(f(x)))'$$

問題-5-A.
次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = \log(1 + x^2)$

(2) $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

(4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - x}{x}$

(5) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2 + \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x^4}}}$

(6) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\sin x}}$

(7) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$

(8) $f(x) = \dfrac{x}{x+\tan x}$

(9) $f(x) = \log(\sin x + \cos x)$

(10) $f(x) = \log(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})$

(11) $f(x) = \log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(12) $f(x) = (1+x)\arctan(1+x) - \dfrac{1}{2}\log(2+2x+x^2)$

21. ロピタルの定理（不定形の極限値） $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ もしくはどちらも発散して $\pm\infty$ のどちらかに向かうとする．もし、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が極限値をもつとする．このとき、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も極限値をもち、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．

問題-5-B.

ロピタルの定理を用いて次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x^2}{2x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+x^2-2x\sin(x)}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x - x}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\tan x - x^2}{\sin^4 x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+\sin x}+\frac{x}{x-\cos x}\right)$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\tan(x)^{-2}}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x}{x^2+x^3+x^4}$

22. ランダウの記号 関数 $f(x)$ が定義域の点 $x=a$ において $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=0$ を満たすとき、

$$f(x) = o((x-a)^n)\ \ (x\to a)$$

と表す．$(x-a)^n$ の代わりに、$x\to a$ において $g(x)\to 0$ となる関数 $g(x)$ を使うこともある．

[意味] 関数 $f(x)$ が $x=a$ の近くで $(x-a)^n$ よりも速く小さくなる．また、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-h(x)}{(x-a)^n}=0$ であることを

$$f(x) = h(x) + o((x-a)^n)\ \ (x\to a)$$

と表す.
[意味] 関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限での速くなるなり方が、$o((x-a)^n)$ の速さから比べれば、だいたい $h(x)$ と同じくらいである.
ランダウの記号を使って、関数 $f(x)$ の成分のうち、小さくなる部分 $o((x-a)^n)$ と、主要部 $h(x)$ を分けたことになる.

問題-5-C.

ランダウの記号を使って、次の関数を $h(x) + o(x^n)$ のように分解せよ.

(1) $e^x, n = 2$　　(2) $e^{2x}, n = 2$　　(3) $(x+1)^3, n = 2$

(5) $\sin x, n = 3$　　(5) $xe^x, n = 2$　　(6) $e^x \sin x, n = 3$

宿題-5-1. [変曲点]

関数 $y = f(x)$ について以下の問題に答えよ．ただし、$f(x)$ は以下の式.

$$f(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{\cosh(x) + 1}$$

(1) 変曲点が $(a, f(a))$ となるとき、$\log(a)$ の値を小数第 2 位まで求めよ．ただし、$\sqrt{3}$ はだいたい、1.732 を使っても良い.

(2) $y = f(x)$ のグラフを描け.

宿題-5-2. [ロピタルの定理]

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\infty} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+1)}{(e^x-1)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)\log(1+x) - x}{\sin^2 x}$

宿題-5-3. [ランダウの記号]

ロピタルの定理を応用して、次のランダウの記号を用いた式が成り立つことを示せ．そのとき、極限に関する所々の性質は用いても良い．ただし極限は、$x \to 0$ のものとする.

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

(2) $f(x) = o(x^n)$ かつ $g(x) = o(x^m)$ なら $f(x)g(x) = o(x^{n+m})$

(3) $x^n + x^m = o(x^n)$ ただし、$n \le m$

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）
ランダウの記号について
(http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html)
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.