

第6回 ('16年6月1日：Keywords・・・ランダウの記号、テイラー展開)

今日の課題.

1. ランダウの記号になれること . 2. 関数を近似する多項式を求めること . 3. テイラー展開を計算できること .

23. ランダウの記号の性質 ランダウの記号は以下のような性質を満たす . ここでは簡単のため全て $x \rightarrow 0$ とする .

$$(1) \alpha \neq 0 \text{ なる実数の時、} \alpha o(x^n) = o(x^n)$$

$$(2) x^m o(x^n) = o(x^{n+m}) \quad (n \geq 0, -n < m)$$

$$(3) o(x^m)o(x^n) = o(x^{n+m}) \quad (n, m \geq 0)$$

$$(4) m \leq n \text{ ならば、} o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$$

ただし、ランダウ記号同士の引き算、 $o(x^n) - o(x^n) = 0$ などは成り立たない .

問題-6-A.

ランダウの記号 $o(x^2)$ と多項式を用いて次の関数を分解せよ .

$$(1) f(x) = xe^x$$

$$(2) f(x) = (x+1)\sin x$$

$$(3) f(x) = x \cos x$$

$$(4) f(x) = e^x \sin x$$

$$(5) f(x) = x \cos x^2$$

$$(6) f(x) = \sin x^2$$

$$(7) f(x) = (x+1)e^{x^2}$$

$$(8) f(x) = \cos x \sin x$$

$$(9) f(x) = (x^2 + x + 1) \cos x,$$

$$(10) f(x) = (1 + x + 1000x^3)(\sin x^2 + 200x^3)$$

$$(11) f(x) = (1+x)e^x \cos x,$$

$$(12) f(x) = (1+x^{100})(1+x)\sin x$$

$$(13) f(x) = (x+x^2)e^{x^{2016}},$$

$$(14) f(x) = \cos x(1+\sin x)$$

$$(15) f(x) = e^x \log(1+x),$$

$$(16) f(x) = \sum_{n=-10}^{10} e^{x^n}$$

24. 平均値の定理 微分可能関数 $f(x)$ において、

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

なる式を満たす x と a の間の実数 c が存在する .

25. テイラー展開 (多項式近似) C^n 級関数 $f(x)$ は、ある n 次以下の多項式 $p(x)$ を用いて、

$$f(x) = p(x) + o((x - a)^n)$$

と一意的に分解できる . この多項式を $x = a$ での n 次までのテイラー展開といい、 $p(x)$ は n 次のテイラー多項式という . この $p(x)$ は $x = a$ での $f(x)$ の n 次多項式近似である . $p(x)$ の計算式は以下である .

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

$a = 0$ でのテイラー展開をマクローリン展開という .

指数関数、三角関数、対数関数、べき乗関数 $((1 + x)^\alpha)$ のテイラー展開はすぐに計算できるようにしよう .

問題-6-B.

次の関数 $f(x)$ の $x = a$ での n 次のテイラー多項式を求めよ .

(1) $f(x) = \log(1 + x), a = 0, n = 3$

(2) $f(x) = \sqrt{1 + x}, a = 0, n = 3$

(3) $f(x) = e^x, a = 0, n = 5$

(4) $f(x) = \log(1 + x^2), a = 0, n = 6$

(5) $f(x) = \sin x, a = 0, n = 5$

(6) $f(x) = \cos x, a = 0, n = 6$

(7) $f(x) = e^x, a = 1, n = 3$

(8) $f(x) = \frac{1}{1 - x}, a = 0, n = 4$

(9) $f(x) = \log(1 + \tan x), a = 0, n = 2$

(10) $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right), a = 0, n = 2.$

(11) $f(x) = \log \frac{1 - x}{1 + x}, a = 0, n = 3$

(12) $f(x) = \arctan(x), a = 0, n = 3$

(13) $f(x) = \log \frac{1 + x^2}{1 + x^4}, a = 0, n = 4$

(14) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{3}}, a = 0, n = 3$

(15) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1, n = 3$

(16) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3} & x \neq 0 \\ -\frac{1}{3} & x = 0 \end{cases}, a = 0, n = 2$

(17) $f(x) = \frac{x}{1 + x}, a = 0, n = 2$

(18) $f(x) = e^{x^2}, a = 0, n = 4$

(19) $f(x) = \frac{1 + x}{x^2}, a = 1, n = 2$

(20) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}, a = 0, n = 2$

$$(21) f(x) = x \log(1+x), a=0, n=3$$

$$(22) f(x) = x^3 \sqrt{1+x}, a=0, n=3$$

26. 剰余項 テイラー展開の分解において、 $o((x-a)^n)$ の部分の関数をテイラー展開の剰余項という。剰余項 $R_{n+1}(x)$ は以下のように、関数 $f(x)$ と $0 < \theta < 1$ なるある数を用いて以下のように表される。

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

ただし、 θ は n, x, a に依存して決まるある定数である。

問題-6-C.

上の 6-B(1)-(22) において剰余項を計算せよ。

宿題-6-1. [テイラー展開からの平均値の定理]

剰余項を込めて考えた 1 次のテイラー展開は、平均値の定理を表していることを示せ。

宿題-6-2. [テイラー展開]

次の関数の $x=0$ での n 次のテイラー展開（マクローリン展開）を計算せよ。また剰余項を $0 < \theta < 1$ を用いて計算せよ。

$$(1) f(x) = \tan x, n=3$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, n=3$$

$$(3) \sin x$$

$$(4) \cos x$$

宿題-6-3. [倍角の公式の 3 次近似式]

$\sin x$ のテイラー展開 $p_1(x) + o(x^3)$ と $\cos x$ のテイラー展開 $p_1(x) + o(x^3)$ を求め、それらを用いて式 $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ の両辺のテイラー展開を 3 次まで求めることで、この倍角の公式が $x=0$ において 3 次の項まで成立していることを示せ。

質問・その他 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください。

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB

(blog など更新情報などその他)

ランダウの記号について

(http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html)

質問コーナー

(質問など部屋 B715 にて受け付けます。月曜 PM3 時まで、火曜 PM4 時半まで。不定期ですので事前要相談)