

**第7回** ('16年6月8日 : Keywords ... べき級数展開)

今日の課題.

1. テイラー展開を用いて、極限を計算すること . 2. 関数をべき級数展開をすること .

**27. テイラー展開を用いた関数の極限****問題-7-A.**

テイラー展開を利用して、以下の極限を求めよ .

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{e^{2x} - 1}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

(6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right)$

(7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$

(8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - e^x}{\sin^3 x}$

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left( \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} \right)$

(10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left( \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x + \frac{x^3}{3}} \right)$

(11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{1 - \cos x}$

(12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2 \cos x}{\cos x + \frac{x \sin x}{2} - 1}$

**28. 解析関数** 関数  $f(x)$  の剰余項が定義域の各点で収束するとき、その関数を解析関数という . 解析関数  $f(x)$  は、各点  $x = c$  に置いて、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

のようにべき級数に展開することができる .

**問題-7-B.**

次の関数が解析関数であることを使って、べき級数展開をせよ .

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(2) f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$(3) f(x) = \arcsin x$$

$$(4) f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$(6) f(x) = \operatorname{arctanh} x$$

**問題-7-C.**

次の値の近似値を関数  $f(x)$  のマクローリン展開を用いて計算せよ .

$$(1) \frac{\pi}{4}, f(x) = \arctan x$$

$$(2) \log 2, f(x) = \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$(3) e^{\frac{1}{2}}, f(x) = e^x$$

**問題-7-D.**

関数  $f(x)$  に対して、ルジャンドルの剰余項が収束することを示せ .

$$(1) f(x) = e^x$$

---

### 宿題-7-1. [テイラー展開を用いた極限の計算]

次の極限をテイラー展開を用いて求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{4 + \sin^2 x} - \cos^2 x}{x^2}$$

### 宿題-7-2. [sin 1 の近似値]

$\sin x$  のマクローリン展開から  $\sin 1(\text{rad})$  の近似値を求めよ.

### 宿題-7-3. [級数の収束]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

の値を以下のようにして求める.

(1)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1}$  はどのような関数のテイラー展開か?

(2) 上の級数の値を求めよ.

**質問・その他** 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください.

---

ホームページ: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog: (<http://mochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB

(blog など更新情報などその他)

ランダウの記号について

([http://mochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post\\_13.html](http://mochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html))

質問コーナー

(質問など部屋 B715 にて受け付けます. 月曜 PM3 時まで、火曜 PM4 時半まで. 不定期ですので事前要相談)