微積分 I 演習 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 8 回（'16 年 6 月 15 日：Keywords ⋯ 部分分数分解、テイラー展開、連続微分可能）

今日の課題.
1. 部分分数を駆使して有理関数のテイラー展開を求めること．2. テイラー展開から関数を求めること．

---

29. 連続微分可能　関数 $f(x)$ が n 回微分可能であり、n 回微分した関数が連続であるとき、その関数は C^n 級である、もしくは、n 回連続微分可能という．何回でも微分できる関数のことを C^∞ 級関数という．C^∞ 関数と解析関数は大きく異なるし、 C^1 級関数と微分可能関数とも大きく異なる．

問題-8-A.

(1) $\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ なる関数を用いて、C^∞ 級関数と、解析関数の違うことを証明せよ．

(2) $\begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ なる関数を用いて、C^1 級関数と、微分可能関数の違うことを証明せよ．

30. 解析関数のべき級数展開　解析関数 $f(x)$ とは、定義域の各点 $x = a$ において、その十分近くで剰余項が収束している．そのべき級数が収束するための最大の区間 $(a - r, a + r)$ の r のことを**収束半径**という．収束半径内においては、べき級数は、項別微積分を行っても良い．べき級数の収束半径の求め方は、後に何処かで行う．

幾何級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1 であり、$|x| < 1$ では、自由に項別の微積分を行って良い．

31. 有理関数の部分分数分解とテイラー展開　有理関数とは、ある多項式 $f(x), g(x)$ を使って、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とかける関数である．

有理関数は、例えば、$\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ $(a \neq b)$ は $\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-b}\right)$ のように分解することができる．このような分解を部分分数分解という．

また、$\dfrac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$ となる部分分数分解を用いることで、この 2 つを組み合わせれば、$\dfrac{(1\text{ 次式})}{(x-a)(x-b)}$ の形の有理関数は、$\dfrac{1}{x-a}$ と $\dfrac{1}{x-b}$ を組み合わせに分解することができる．分子が 2 次式以上であれば、分母で割ってやることで、多項式とこの分数の式の 2

つに分解することができる．$\dfrac{1}{x-a}$ のような形のテイラー展開は、幾何級数の展開を応用することで、このようなタイプの有理関数はテイラー展開を行うことができる．分母に 3 個以上積がある場合は、同様な分解をすることができる．

$\dfrac{1}{(x-a)^2}$ のような形は、これ以上部分分数分解をすることができない．この関数の $x = b \neq a$ におけるテイラー展開は、一度関数を積分しておいて展開をし、その後もう一度微分をすれば良い．

また、$\dfrac{1}{1-x^n}$ のようなタイプの関数も、幾何級数に帰着させて求めることができる．

問題-8-B.

次の関数のマクローリン展開を求めよ．

(1) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+100)}$

(2) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$

(3) $\dfrac{x}{(x+1)^2}$

(4) $\dfrac{2}{1-x^2}$

(5) $\dfrac{x}{(1+x)^3}$

(6) $\dfrac{4x+3}{(x+2)(x+1)}$

(7) $\dfrac{x^2}{3+2x+x^2}$

(8) $\dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)}$

(9) $\dfrac{1}{x^2-x+1}$

(10) $\dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)}$

(11) $\dfrac{x}{(x+1)^2(x-1)}$

(12) $\dfrac{5x}{(2+x)(3-x)}$

32. べき級数から関数を推測すること

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ がどのような関数のべき級数であるかということを発見することは難しい．

問題-8-C.

次のべき級数展開はその収束域においてどのような関数であるか？

(1) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2+2n+1)x^n$

(2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5n+1}{2^n}x^n$

(3) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^n}x^n$

(4) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(5) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^n} x^n$

(6) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} x^n$

(7) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)!} x^n$

(8) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} x^{2n}$

(9) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$

(10) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} x^n$

(11) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^n$

(12) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} x^n$

問題-8-D.

次の関数 $f(x)$ に対する関数 $\dfrac{1}{f(x)}$ のテイラー展開を 4 次の項まで求めよ.

(1) $f(x) = 1 + x + x^2$

(2) $f(x) = 1 + x + 2x^2$

(3) $f(x) = 1 - \tan x$

(4) $f(x) = \cos x$

(5) $f(x) = 1 - \sin x$

(6) $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{x}$

宿題-8-1. [$\dfrac{1}{f(x)}$ の形の関数の展開]
$f(x) = 1 - x^3 + x^6$ としたとき、$\dfrac{1}{f(x)}$ のマクローリン展開の 0 のでない係数を最初から 4 項目まで求めよ.

宿題-8-2. [無限級数から関数へ]
次の級数を簡単な関数を用いて書きたい.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} \qquad (\dagger)$$

(1) まず、展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(*)$ を考える．この展開が e^x の展開の一部であることに着目し、工夫して e^x の奇数の項を消すようにすることで、$(*)$ の展開はどのような関数の展開であるだろうか？

(2) (1) と同じようにして、展開 $(*)$ から、展開 $(\dagger)$ がどのような関数か求めよ.

宿題-8-3. [有理関数のテイラー展開]
次の有理関数を部分分数に分解することで、この関数のべき級数展開を求めよ.

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)^2}$$

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、自由に書いてください.

ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bis.html`
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(`http://motochans.blogspot.jp/`)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）
ランダウの記号について
(`http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html`)
質問コーナー
（質問など部屋 B715 にて受け付けます．月曜 PM3 時まで、火曜 PM4 時半まで．事前要相談）
手習い塾
（1H205．火曜 PM4:45 から 6:00）