

線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第1回 ('16年4月15日：Keywords・・・1年生の復習．ベクトル空間、核、像)

今日の課題.

1. 線形代数 I, II の復習.

まとめ.

1-1. 巾零行列・・・ A を正方行列とする．ある正整数 ν において、 $A^\nu = O$ となるとき、行列 A はべきゼロ行列という．

1-2. ベクトルの一次独立性に関するある命題・・・ V を線形空間とする． $v_1, \dots, v_n$ を V の基底とし、 $w_1, \dots, w_n$ を V のベクトルとする．次の条件は互いに同値である．

1. $w_1, \dots, w_n$ は V の基底である．
2. ベクトル $(w_1, \dots, w_n)$ を $(w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_n)A$ のように基底を使って表したときの表示行列 A は正則である．
3. $w_1, \dots, w_n$ は一次独立である．

1-3. $s(\mathbb{K})$ ・・・係数を $\mathbb{K}$ とする数列全体の集合．

1-4. $\mathbb{K}[x], \mathbb{K}[x]_n$ ・・・係数を $\mathbb{K}$ とする多項式全体の集合、および、係数を $\mathbb{K}$ とする n 次以下の多項式の全体の集合．

A-1-1. [ベクトル空間]

次の集合はベクトル空間か？

(1) n 次多項式全体

(2) n 次以下の多項式全体

A-1-2. [一次独立]

ベクトル空間 V において次のベクトルは一次独立であることを示せ．

(1) $V = \mathbb{R}[x]_2, 1 + x + x^2, 1 - x - x^2$

(2) $V = C([0, \pi]), 1, \sin x, \cos x$

(3) $V = s(\mathbb{R}), (1, 2, 3, 4, \dots), (1, 4, 9, 16, \dots), (1, 8, 27, 64, \dots)$

A-1-3. [部分ベクトル空間]

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の任意の $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ において、 $x_i - x_{i+1} = 0$ ($i = 1, 3$) を満たす空間はどのようなベクトル空間となるか？基底を使って表せ．

A-1-4. [2 次以下の多項式]

2 次以下の多項式全体のうち、関数等式 $f(x) = f(1 - x)$ を満たすものの全体はどのようなベクトル空間となるか？基底を使って表せ．

B-1-1. [ベクトル空間]

実数上の連続関数のなす空間 $C(\mathbb{R})$ の中で次の空間は線形部分ベクトル空間となるか？

- (1) 有界な連続関数のなす部分ベクトル空間.
- (2) $\mathbb{R}$ の双対空間.

B-1-2. [線形写像]

像の満たす集合を自分で適切に選ぶことで、次の写像が線形写像であることを確かめよ.

- (1) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 + a_2 + a_3, (\mathbf{a} \in \mathbb{C}^3)$
- (2) $f(x) \mapsto f(x) - f(1-x), (f(x) \in \mathbb{R}[x])$

B-1-3. [基底]

次のベクトルは、 $\mathbb{R}[x]_7$ で基底となるか？

$$\{x^7, (x-1)^7, (x-2)^7, (x-3)^7, \dots, (x-7)^7\}$$

B-1-4. [像と核]

次の線形写像の核と像の基底を求めよ.

- (1) $\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$
- (2) $\mathbb{R}[x]_2 \ni f(x) \mapsto f(x^2) - f(x)x^2 \in \mathbb{C}[x]_3$

B-1-5. [同型写像]

V をベクトル空間とし、 $f: V \rightarrow V$ を線形写像とする. 以下は同値であることを示せ.

- (1) f は単射である.
- (2) f は全射である.
- (3) f は同型である.

B-1-6. [実数列]

以下の問題に答えよ.

- (1) $s(\mathbb{R})$ の中の部分集合 $s(\mathbb{R})_f$ を $s(\mathbb{R})_f = \{(x_n) \in s(\mathbb{R}) \mid \text{有限個の } n \text{ 以外全て } 0\}$ とおく. このとき、 V はベクトル空間であることを示せ. またその次元は有限次元ではないことを示せ.
- (2) $s(\mathbb{R})_f$ の中の部分集合 $s(\mathbb{R})_{f,0}$ を $s(\mathbb{R})_{f,0} = \{(x_n) \in s(\mathbb{R}) \mid \text{有限個の } n \text{ 以外全て } 0 \text{ かつ } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$ とおく. このとき、 $s(\mathbb{R})_{f,0}$ はベクトル空間であることを示し、その基底は、 $\mathbf{e}_i, (i = 1, 2, \dots)$ であることを示せ. ただし、ベクトル $\mathbf{e}_i$ は、 $\mathbf{e}_i = (x_n)$ としたときに、

$$x_n = \begin{cases} 1 & n = i \\ -1 & n = i + 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

として定義される.

B-1-7. [基底の変換行列]

次のベクトル空間 V と 2 つの基底 $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ において、 $\mathcal{B}_1$ を $\mathcal{B}_2$ にかえる基底の変換行列を求めよ. ただし、 $\{\mathbf{e}_i\}$ は数ベクトル空間上の標準基底であるとし、下のベクトルが基底であることは示す必要はない.

(1) $V = \mathbb{C}[X]_2$, $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}_2 = (1, X - 1, (X - 1)^2)$

(2) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_3, e_1)$

(3) $V = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) \mid a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\}$,

$\mathcal{B}_1 = ((0, 1, 2, 7, 20, \dots), (1, 0, 3, 6, 21, \dots)), \mathcal{B}_2 = ((2, 1, 8, 19, 62, \dots), (3, 1, 11, 25, 83, \dots))$

B-1-8. [数列のなすベクトル空間の関係式]

次の $s(\mathbb{R})$ のベクトルが張るベクトル空間の満たす関係式を求めよ. $(1, 2, 3, 4, \dots), (1, 4, 9, 16, \dots)$

C-1-1. [ベクトル空間]

巾零行列の固有多項式は x^n であることを示せ.

C-1-2. [連立一次方程式]

$\mathbb{C}[x]_2$ において、次の方程式を満たす部分空間の基底を多項式を使って求めよ.

$$f(x) + f(x+2) = 2f(x+1)$$

C-1-3. [どの2つも一次独立なベクトルの列]

v_1, v_2 をベクトル空間 V の一次独立なベクトルとする. $n > 2$ なる自然数において、 v_n を $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ によって $v_3, v_4, \dots$ を帰納的に定義する. W をこれらのベクトルの有限個のベクトルの一次結合からなる V の部分ベクトル空間とする. このとき以下の問題に答えよ.

(1) 任意の v_n は v_1, v_2 の一次結合となることを示せ.

(2) 任意の n において v_n と v_{n-1} は W の基底となることを示せ.

ホームページ: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog: (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります. アドレスはプリント1ページ目上部.