

線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第11回 ('16年7月8日：Keywords・・・ジョルダン基底・ホモロジー群)

今日の課題.

1. ジョルダン標準形とジョルダン基底を求めること.

まとめ.

11-1. 境界作用素とホモロジー・・・ 実数、複素ベクトル空間の線形べきゼロ変換 $d : V \rightarrow V$ が $d \circ d = 0$ のとき、 d を境界作用素という. この時、 $\text{Im}(d)$ は $\text{Ker}(d)$ の部分空間であり、ベクトル空間 $\text{Ker}(d)/\text{Im}(d)$ のことを、 (V, d) の **ホモロジー** という.

11-2. 空間 W_i ・・・ $f : V \rightarrow V$ を線形変換とする. このとき、 $W_i = \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f^i)$ とおく. $W_i \cong \text{Ker}(f^{i+1})/\text{Ker}(f^i)$ となる同型写像が存在する.

B-11-1. [標準形]

次の行列のジョルダン標準形を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(11) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -7 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & -5 & 3 \\ -3 & -4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

B-11-2. [ベクトル空間上の線形変換]

次のベクトル空間 V 上の線形変換 $F : V \rightarrow V$ において、そのジョルダン基底とその分解を求めよ.

$$(1) V = \mathbb{R}[x]_2, F(f(x)) = f(x-1)$$

$$(2) V = \mathbb{R}[x]_3, F(f(x)) = f(x-1)$$

$$(3) V = \mathbb{R}[x]_2, F(f(x)) = f'(x)$$

$$(4) V = \mathbb{R}[x]_3, F(f(x)) = f(x-1)$$

B-11-3. [最小多項式]

$n \times n$ 行列 A は固有値 λ ただ一つだけもつとする. A の最小多項式が $(t-\lambda)^n$ のとき、 A の $V_{(\lambda)}$ のヤング図形と、標準化はどのような行列か?

B-11-4. [最小多項式]

最小多項式の根の重複度は、それぞれの広義固有空間のヤング図形にどのように反映されるか？

B-11-5. [サイズ3のジョルダンブロックの数]

λ を A の固有値とする． λ の広義固有空間 $V_{(\lambda)}$ の中に含まれるサイズが3のジョルダンブロック

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の数は、どのようなベクトル空間の商空間の次元として表せるか．

B-11-6. [最大数の一次独立なベクトル]

次のべきゼロ行列で、 $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \dots, A^{d-1}\mathbf{v}$ が一次独立となる最大の d を求めよ．またそのような $\mathbf{v}$ を一つ求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & -1 & 4 \\ -5 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

B-11-7. [ホモロジーの次元と基底]

次のべきゼロ変換 f は $f^2 = 0$ を満たす．このとき、 f を境界作用素とするととき、数ベクトル空間 (V, f) のホモロジーの次元と基底を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B-11-8. [図形のホモロジー]

境界のついた任意の三角形 D を考える． D を D の内部 D_2 と、三辺 D_1^i ($i = 1, 2, 3$)と三頂点 D_0^i ($i = 1, 2, 3$)の和集合として考える．ただし、どのピースも境界はとって考える．つまり交わりのない和集合によって、

$$D = D_2 \cup_{i=1}^3 D_1^i \cup_{i=1}^3 D_0^i$$

と表せる．このとき、 V をこれらの7つのピースの形式和とする実数上のベクトル空間とし、それぞれのピースは、一次独立とする．また、 $-D_i^j$ などは D_i^j の逆向きのピースと考える． V 上の線形変換 $\partial: V \rightarrow V$ として、 $\partial\Delta$ を図形 Δ の境界のピースの一次結合として定義する．例

例えば、 $\partial D_2 = D_1^1 + D_1^2 + D_1^3$ である。ただし、 D_1, D_2, D_3 の向きは同じ向きと考える。また、0次元のピースによる ∂ は0写像と考える。このとき、以下の問題に答えよ。

- (1) $\partial^2 = 0$ であることを証明せよ。
- (2) ∂ の表現行列を求めよ。
- (3) (V, ∂) のホモロジーの基底を求めよ。

C-11-1. [べきゼロ行列のジョルダンプロック]

次のべきゼロ行列 A について答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) $A^d = O$ となる最小の d の値を求めよ。
- (2) $\text{Ker}(A), \text{Ker}(A^2)$ の基底を求めよ。
- (3) $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \dots, A^{d-1}\mathbf{v}$ が一次独立であるようなベクトル $\mathbf{v}$ を一つ求めよ。

C-11-2. [W_i の次元からのジョルダンプロック分解]

$f: V \rightarrow V$ を線形変換とする。 $W_i = \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f^i)$ とおく。このとき、次の問題に答えよ。

- (1) $\dim(W_i) = w_i$ とおく。 w_i は減少列となることを示せ。
- (2) $w_0 = 5, w_1 = 5, w_2 = 4, w_3 = 3, w_4 = 3, w_5 = 1, w_6 = 1, w_7 = 0$ のとき、 f はどのようなジョルダンプロックをもつか？

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：[\(http://motoshans.blogspot.jp/\)](http://motoshans.blogspot.jp/)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント1ページ目上部。