

線形代数統論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第12回 ('16年7月15日：Keywords・・・正多面体)

今日の課題.

1. 演習問題を解くこと.

まとめ.

12-1. 正多面体・・・正多面体は、一つの面が正 n 角形でできた多面体であり、一つの頂点に集まる、面の数が、頂点の位置によらないものをいう．一つの面が正 n 角形で作られる正多面体を正 n 面体という．全ての正多面体は、

正四面体・正六面体・正八面体・正十二面体・正二十面体

の5つである．正 n 面体を T_n とする．

12-2. 部分群・・・ G を群とする． $H \subset G$ を部分集合とする． H の任意の元の G での積が H の中で閉じており、そのような積において、 H が群をなすとき、 H を G の部分群という．

12-3. 正多面体群・・・正多面体を動かして、再び、同じ正多面体の位置に持ってくるような移動のなす群を正多面体群という．正 n 面体群を $G(T_n)$ と書くことにする．

12-4. 準同型・・・ G, G' が群とする．このとき、 $f: G \rightarrow G'$ が準同型であるとは、 $f(gg') = f(g)f(g')$ であるという．準同型かつ、全単射な群準同型を群同型という．

12-5. 群の線形表現・・・ $\mathbb{K}$ をある体とする． V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする． $GL(V)$ を V 上の正則変換とする．群 G から、 $GL(V)$ への群準同型 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ を G の V 上の線形表現という． V 上に線形な G -作用が定まることと、 G の V 上に線形表現が定まるとは同値である．

12-6. 同値な線形表現・・・ $\rho: G \rightarrow GL(V)$ と $\tau: G \rightarrow GL(V)$ が同値な線形表現であるとは、ある、 V 上の正則変換 T が存在して、任意の g に対して、 $T \circ \rho(g) = \tau(g) \circ T$ となることである．つまり、可換図式

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(g)} & V \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ V & \xrightarrow{\tau(g)} & V \end{array}$$

が成り立つことをいう．

12-7. 対称群・・・ $\{1, 2, \dots, n\}$ を n この数とする．この数を並び替えとして誘導される群を n 次対称群（置換群）といい、 S_n と表す．一つの対称群の元を置換という． (i, j) を i と j を入れ替え、その他の数を動かさない置換を互換という．全ての置換は互換の積によって表すことができる．偶数個の互換によって表される置換を偶置換、奇数個の置換によって表される置換を奇置換という．偶置換全体は、 S_n 内の積によって、閉じており、 S_n の部分群をなす．

12-8. 既約表現・・・ G の線形空間 V 上の線形表現に G -不変部分空間が存在しないとき、 G の $GL(V)$ への既約表現であるという．既約でない表現を可約表現であるという． W が V の G -不変部分空間であり、さらに、 W に G -不変な補空間が存在するとき、 W を G -不変直和因子という．

12-9. 完全可約表現・・・群 G の V 上の線形表現が、既約な G -不変直和因子に分解するとき、完全可約と言う．

12-10. 有限群の線形表現の完全可約性・・・有限群の線形表現は完全可約である．

12-11. 単体複体とそのホモロジー・・・ k -単体とは、 $\mathbb{R}^{k+1}$ の部分集合 $\Delta_k = \left\{ (t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$

となる集合のことである． l を $0 \leq l < k$ であり、 $\{k_1, \dots, k_{k-l}\}$ を $\{1, \dots, k+1\}$ の部分集合であるとする． $\{x \in \Delta_k | t_{k_i} = 0 (1 \leq i \leq k-l)\}$ は Δ_k の境界の l -単体である．このような l -単体を Δ_k の面という．このような単体の内部の交わらない和集合 X で、 X に含まれる任意の単体 Δ の面も全て X の単体として含まれるとき、 X は単体複体という．単体複体のホモロジー (C, ∂) とは、 C を、 X に含まれる全ての単体を基底とする $\mathbb{K}$ -ベクトル空間で、 Δ を k -単体とするとき、境界作用素 $\partial: C \rightarrow C$ は $\partial\Delta$ を Δ の $k-1$ -単体の和集合で、 Δ の向きに沿ったものとする．このとき、 $\partial^2 = 0$ となり、 (C, ∂) のホモロジー $H(C) = \bigoplus_k H_k(C)$ を定義することができる． $H_k(C)$ は、ホモロジーの中で、 k -単体で生成される部分空間である．このホモロジーを単体複体のホモロジーという．

B-12-1. [正四面体群]

正四面体群 $G(T_4)$ は、 A_4 と同型であることを示せ．

B-12-2. [正六面体群]

正六面体群 $G(T_6)$ は、 S_4 と同型であることを示せ．

B-12-3. [正八面体群]

正八面体群 $G(T_8)$ は、 S_4 と同型であることを示せ．

B-12-4. [正十二面体群]

正十二面体群 $G(T_{12})$ は、 A_5 と同型であることを示せ．

B-12-5. [正二十面体群]

正二十面体群 $G(T_{20})$ は、 A_5 と同型であることを示せ．

B-12-6. [正 n 面体]

正 n 面体 T_n の面の数を m とし、辺の数を l 、頂点の数を k とする．次の問題に答えよ．

- (1) 正 n 角形の一つの角の大きさを求めよ．
- (2) 一つの頂点に集まる正 n 角形の頂点の個数を x とする．このとき、それらの総和が 360° より小さく、 $x > 2$ であることを使うと、 (x, n) はどのように制限されるか？
- (3) T_n に対して n, m を使って辺の数を数え、 x, n, m を使って頂点の数を数えることで、 k, l, m, n, x の間にある 2 つの関係式を導け．
- (4) オイラーの等式 $k - l + m = 2$ を使うことで、正 n 面体は 5 種類しかないことを証明せよ．

B-12-7. [既約表現]

J を固有値がある複素数となる一つのジョルダンブロックとする．行列 A が J と共役な行列であるとする．つまり、ある正則行列 P が存在して、 $A = P^{-1}JP$ となる行列．このとき、 $\mathbb{Z}$ の線形表現

$$\mathbb{Z} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

を $m \mapsto A^m$ として定義する．このとき、この表現は、可約であるが、完全可約でないことを示せ．

B-12-8. [ユニタリ行列による対角化]

次の行列をユニタリ行列によって対角化せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

B-12-9. [正四面体のホモロジー群]

正四面体は自然に、単体複体とみなすことができる．正多面体の単体複体としてのホモロジー群を求めよ．

C-12-1. [ユニタリ行列による対角化]

次の行列をユニタリ行列によって対角化せよ．ここで、 ω は 1 の 3 乗根である．

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix}$$

C-12-2. [ジョルダン標準形]

次の行列 A を考える

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A が対角化可能であるような複素数 a, b, c の条件を求めよ．
 - (2) A のジョルダン標準形が 2 個と 1 個の箱の積み上げとなるための a, b, c の条件をもとめよ．
 - (3) A のジョルダン標準形が 3 個の箱の横並びとなるための a, b, c の条件をもとめよ．
-

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：<http://motoshans.blogspot.jp/>

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部．