

線形代数統論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第13回 ('16年7月22日：Keywords・・・単因子論)

今日の課題.

1. V 上の加群の構造を決定することで計算される、ジョルダンのブロック分解ができるようにすること.

まとめ.

13-1. 環・・・ R が環であるとは R には足し算 $+$ と積 $\cdot$ が定義された集合であり、その2つの演算により閉じており、以下を満たす.

- (1) $r, s, t \in R$ に対して、 $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$
- (2) $r, s, t \in R$ に対して、 $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$ および、 $t \cdot (r + s) = t \cdot r + t \cdot s$
- (3) 1 が存在して、任意の $r \in R$ に対して、 $1 \cdot r = r$ が成り立つ.
- (4) $0 \in R$ が存在して、任意の r に対して、 $0 \cdot r = 0$ となる.

例として、整数全体や、多項式は環になる. また体は、除法を忘れることで、環となる.

13-2. 加群・・・ M が加群であるとは、 M が可換な群のことを言う. このとき、群の2項演算は $+$ であらわす. 環は足し算に関して加群となる.

13-3. 環 R 上の加群 M ・・・ R を環とし、 M を加群とする. このとき、 $r \in R$ と $m \in M$ に対して、積 $r \cdot m \in M$ が定義でき、以下を満たす.

- (1) $r \in R, m, n \in M$ に対して、 $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$
- (2) $r, s \in R, m \in M$ に対して、 $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$
- (3) $r, s \in R, m \in M$ に対して、 $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$
- (4) $1, 0 \in R$ に対して、 $1 \cdot m = m, 0 \cdot m = 0$ このような加群 M のことを、 R 加群という.

13-4. R 加群の例・・・ R を多項式 $\mathbb{C}[T]$ とし、ベクトル空間 V を加群とする. このとき、 $f: V \rightarrow V$ を線形変換とすると、 $p(T) \in R$ とすると、

$$v \mapsto p(T) \cdot v = p(f) \cdot v$$

によって R 上の V への積となり、上の性質を満たすので、 V は、 R 加群となる.

13-5. ベクトル空間上の自己準同型写像・・・ $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間上の線形自己準同型写像 (線形変換のこと) 全体とする. このとき、以下の同値関係がある.

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \cong \{V \text{ 上の } \mathbb{K}[T] \text{ 加群全体} \}$$

13-6. ジョルダン標準形再訪・・・ V を n 次元数ベクトル空間とする. 線形変換 $f: V \rightarrow V$ のジョルダン標準形とは、 V の上のような多項式環を R として R 加群の構造を定めればよいことになる. そのとき、次のような、 R 加群 V の完全系列から作られる.

$$\mathbb{K}[T]^n \xrightarrow{\psi} \mathbb{K}[T]^n \xrightarrow{\varphi} V$$

ここで、 φ は $T \cdot E - A$ をかける作用であり、 ψ は、数ベクトル空間 V への T 作用を A 作用としたときにできる像として考える. $\mathbb{K}[T]^n / \text{Im}(\psi)$ が R の作用として V 上の $\mathbb{K}[T]$ 加群と同型となる (準同型定理). 今、 $\text{Im}(\psi)$ の像が、 $\text{diag}(d_1(T), d_2(T), \dots, d_n(T))$ と簡約化されたとき、 $d_i(T)$ のことを

単因子という.

$$d_i(T) = (T - \alpha_{i1})^{n_{i1}} \cdots (T - \alpha_{in})^{n_{in}}$$

と分解されたとすると、 V の R 加群としての構造は、

$$\mathbb{K}[T]/d_1(T)\mathbb{K}[T] \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}[T]/d_n(T)\mathbb{K}[T]$$

となり、 A のジョルダンプロック分解は、

$$J_{n_{ij}}(\alpha_{ij})$$

を並べたものである. また、

$$d_1 | d_2 | \cdots | d_n$$

が成り立ち、特に、 $d_n(T)$ は A の最小多項式である. また、ケイリーハミルトンの定理から、

$$d_1(T) \cdot d_2(T) \cdots d_n(T) = \Phi_A(T)$$

が言える.

13-7. 完全系列 …

$$\cdots C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow \cdots$$

が完全系列であるとは、となりあう線形写像 f, g において、 $\text{Im} f = \text{Ker}(g)$ が成り立つことである.

A-13-1. [単因子論からのジョルダン標準形]

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、 $T \cdot E - A$ を簡約化することで、ジョルダン標準形を求めよ.

B-13-1. [多項式作用]

多項式において、 $V = \mathbb{R}[U]/U^n$ とすると、 V 上の U 作用は V 上の多項式加群を定義する. U の行列表示を求めよ.

B-13-2. [ジョルダン標準形再訪]

V を数ベクトル空間とする. V 上の多項式作用の加群の構造を決定することで、次の行列のジョルダン標準形を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 9 & 1 \\ 3 & -5 & 9 & 1 \\ -10 & 17 & -28 & -2 \end{pmatrix}$$

B-13-3. [ジョルダンのブロックの加群の構造]

A のジョルダン標準形は、 $J_n(a)$ であるとき、ベクトル空間 V 上の行列 A による、 $\mathbb{C}[A]$ -加群は、

$$\mathbb{K}[T]/(T-a)^n\mathbb{K}[T]$$

と同型であることを示せ.

B-13-4. [単因子論からのジョルダン標準形]

以前のジョルダン標準形の問題を、単因子論を用いて調べ、ジョルダン標準形を求めよ.

B-13-5. [可換群の既約表現]

有限可換群の既約表現は一次元であることを示せ.

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：[\(http://motochans.blogspot.jp/\)](http://motochans.blogspot.jp/)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント1ページ目上部.

参考文献：加群十話 (朝倉書店)