

# 線形代数続論演習

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第2回 ('16年4月22日 : Keywords ... 表現行列)

### 今日の課題.

1. 表現行列について復習する .

まとめ.

**2-1. 固有値** ...  $f$  を  $V$  上の線形変換とする . このとき、 $\lambda$  が  $f$  の固有値とは、ある  $x \neq 0$  に対して、 $f(x) = \lambda x$  が成り立つことである .

**2-2. 作用** ... 集合  $S$  に群  $G$  が作用するとは、任意の  $g \in G$  と  $s \in S$  に対して、 $g \cdot s \in S$  が定まって、任意の  $g, h \in G$  に対して、 $g \cdot (h \cdot s) = (g \cdot h) \cdot s$  が成り立つことをいう .

### A-2-1. [表現行列]

線形写像  $F : V \rightarrow W$  に対して、 $f$  の表現行列を求めよ .

- (1)  $F : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2, F(f(x)) = f(1-x)$
- (2)  $F : \langle \sin \theta, \cos \theta \rangle_{\mathbb{R}} \ni f(\theta) \mapsto f(\theta - \pi/4) \in \langle \sin \theta, \cos \theta \rangle_{\mathbb{R}}$
- (3)  $F : V = \{(x_n) \in s(\mathbb{R}) | x_{n+1} = 2x_{n+1} + 3x_{n-1}, \forall n\} \rightarrow V, F((x_n)) = (x_{n+1})$

### B-2-1. [線形写像]

次のような線形変換の (指定された基底があればその基底の元に) 表現行列を求めよ .

- (1)  $F : \mathbb{C}[x, y]_2$  に対して、 $F(f(x, y)) = f(y, x)$  とする .
- (2)  $F : \mathbb{C}[x, y, z]_2$  に対して、 $F(f(x, y, z)) = f(1-x, 1-y, 1-z)$  とする .
- (3)  $M(2, \mathbb{C})$  に対して、 $(i, j)$  成分が 1 でそれ以外が 0 となる行列を基底とすると、任意の行列  $A \in M(2, \mathbb{C})$  を左から掛ける写像の表現行列 .

### B-2-2. [固有値]

$\lambda$  を  $A$  の固有値とする . このとき、 $\lambda + \mu$  は  $A + \mu E$  の固有値であることを示せ .

### B-2-3. [3次対称群に対する正則表現]

$V$  を 3次元のベクトル空間とする .

- (1)  $x_1, x_2, x_3$  を  $V$  の基底とする .  $S_3$  を 3次対称群とする . つまり、 $S_3$  は  $\{1, 2, 3\}$  上の全単射である .  $\sigma \in S_3$  に対して、 $f_{\sigma}(x_i) = x_{\sigma(i)}$  として定義する . このとき、任意の  $\sigma \in S_3$  に対する、 $f_{\sigma}$  の表現行列を求めよ .
- (2) 上記の  $f_{\sigma}$  における表現行列を  $A_{\sigma}$  とする . このとき、 $\det(A_{\sigma}) = \text{sgn}(\sigma)$  であることを示せ .
- (3)  $A_{\sigma\tau} = A_{\tau}A_{\sigma}$  が成り立つことを示せ .

### B-2-4. [巾零行列から決まるある一次独立なベクトル]

$A$  を  $A^{v-1} \neq 0$  かつ  $A^v = 0$  となる  $n \times n$  巾零行列とする . このとき、あるベクトル  $x \in \mathbb{C}^n$  が存在して、

$$x, Ax, \dots, A^{v-1}x$$

が一次独立になるようにできる .

### B-2-5. [ベクトルの基底表示]

次のベクトル  $\mathcal{V} = \{x_1, \dots, x_m\}$  を基底  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  を使ってその表示行列を求め、 $\mathcal{V}$  が基底であるか判定せよ .

- (1)  $\mathcal{V} = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1\}, \mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$
- (2)  $V = ((a_n) \in s(\mathbb{R}) | (a_n) : \text{等差数列}), \mathcal{V} = ((2, 4, 6, \dots), (1, 3, 5, \dots)), \mathcal{B} = ((1, 1, 1, \dots), (1, 2, 3, \dots))$
- (3)  $V = (f(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3] | f(X_1, X_2, X_3) : 3 \text{ 次対称式}), \mathcal{V} = (t_1^3, t_1 t_2 t_3), \mathcal{B} = (s_1^3, s_1 s_2 s_3)$   
ここで、 $s_i$  は上の対称式で書いたものと同じとし、 $t_1 = s_1, t_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, t_3 = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$  と定義する .
- (4)  $V = \{v \in \mathbb{C}^3 | (1 \ 1 \ 1)v = 0\}, \{(1, -1, 0), (3, -5, 2), (0, 1, -1)\}$

### B-2-6. [関数空間]

実ベクトル空間  $C([0, 2\pi])$  の部分ベクトル空間  $V = \langle 1, \cos^2 \theta, \cos \theta \sin \theta \rangle$  を考える . このとき、以下の問題に答えよ .

- (1)  $\{1, \cos^2 \theta, \cos \theta \sin \theta\}$  は実数上のベクトル空間において一次独立であることを示せ .
- (2) ベクトル  $\{1, \cos 2\theta, \sin 2\theta\}$  を上の基底で表せ .

### B-2-7. [補空間の構成]

次の部分ベクトル空間  $W \subset V$  の補空間の基底を求めよ .

- (1)  $V = \mathbb{C}^3, W = \langle (1, 0, 2) \rangle$
- (2)  $V = \mathbb{C}^4, W = \langle (-1, 0, 2, 1), (2, 2, 3, 0) \rangle$

### B-2-8. [部分ベクトル空間、補空間]

$V = \mathbb{C}[x]_2$  とする .  $a \neq b$  とする .

- (1)  $W = \{f \in V | f(a) = f(b) = 0\}$  となる部分ベクトル空間の基底を求めよ .
- (2)  $W$  の補空間をひとつ求めよ .

### B-2-9. [ベクトルの関係式の表示]

$V = \mathbb{C}[x]_2$  において、 $V$  上に成り立つ任意の一次関係式をある  $a, b, c \in \mathbb{C}$  を使って  $af(0) + bf(1) + cf(2) = 0$  として表すことができるか ?

### B-2-10. [ベクトル空間から連立一次方程式]

次のベクトルからなるベクトル空間を解空間とする式の数のもっとも少ない連立一次方程式を求めよ .

- (1)  $V = \mathbb{C}^3, \{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$
- (2)  $V = \mathbb{C}^3, \{(-2, 0, 1), (2, 1, 1)\}$
- (3)  $V = \mathbb{C}^3, \{(0, 1, -1), (-1, 1, 1)\}$
- (4)  $V = \mathbb{C}^4, \{(2, 2, 1, 0), (0, 1, -1, 0)\}$

### B-2-11. [微分方程式の解空間]

$d^2 f/dx^2 + \omega^2 f(x) = 0$  なる微分方程式を考える . この解空間は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間  $V = \langle \sin \omega \cdot \theta, \cos \omega \cdot \theta \rangle$  であることを使って、 $V$  上に  $d/dx$  が線形変換として作用することを示し、その表現行列とその固有値を求めよ .

### B-2-12. [2変数の周期関数]

$V = \langle \cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi \rangle_{\mathbb{R}}$  とする . 線形変換  $F : V \rightarrow V$  を  $F(f(\theta, \phi)) = f(\theta + a, \phi + b)$  として定義する . このとき、 $F$  は線形変換であることを示し、表現行列を求めよ .

---

### C-2-1. [ $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間]

$V = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  を有理数  $r_1, r_2$  として、 $r_1 + r_2\sqrt{2}$  と書ける実数全体の集合とする . このとき、以下の問題に答えよ .

- (1)  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  の集合において、0 以外の元において割り算について閉じていることを示せ .
- (2)  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  は  $\mathbb{Q}$  上の 2 次元ベクトル空間であることを示せ .
- (3)  $a, b \in \mathbb{Q}$  に対して、 $a + b\sqrt{2}$  を掛ける写像を  $f_{a+b\sqrt{2}}$  とする . このとき、 $V \rightarrow V$  の表現行列を求めよ .

### C-2-2. [表現行列の固有値]

$f : V \rightarrow V$  を線形変換とする .  $f$  の表現行列が正則かどうか、またその固有値は、 $f$  だけに依存し、 $V$  の基底の取り方によらないことを示せ .

### C-2-3. [表現行列]

$V = \langle \sin \theta, \cos \theta, \theta \sin \theta, \theta \cos \theta \rangle_{\mathbb{R}}$  とする . この基底において、 $d/d\theta$  を  $V$  上の線形写像として、その表現行列を求めよ .

---

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります . アドレスはプリント 1 ページ目上部 .