線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第3回（'16 年 5 月 6 日：Keywords $\cdots$ f-不変部分空間、基底の延長、同型写像）

今日の課題.

1. 同型写像．2．部分空間

まとめ.

3-1. f-不変部分空間 ••• $f : V \to V$ を線形変換とする．このとき、$W \subset V$ が f-不変部分空間であるとは、W が V の部分空間であって、任意の $\boldsymbol{v} \in W$ に対して $f(\boldsymbol{v}) \in W$ となることである．

3-2. 商空間上の線形写像••• $W \subset V$ を部分空間とする．線形写像 $f : V \to V$ が自然に $\tilde{f} : V/W \to V/W$ を誘導するためには、W が f-不変部分空間であることである．写像が自然に誘導するとは、

$$\tilde{f}([v]) = [f(v)]$$

となることである．

A-3-1. [同型写像]
次のベクトル空間において、同型写像 $F : V \to W$ をつくれ．

(1) $V = \mathbb{R}^4$, $F({}^t(1,1,1,1)) = {}^t(1,0,1,0), F({}^t(1,1,-1,-1)) = {}^t(1,1,0,0)$

(2) $V = \mathbb{R}^4$, $F({}^t(1,0,0,1)) ={}^t (1,-1,1,-1)$

(3) $V = \mathbb{R}[x]_2$, $F(x + 2x) = x + x^2, F(1 + x + x^2) = 1 - x + x^2$

(4) $C(\mathbb{R})$, 偶関数 f に対して $F(f(x)) = f(1 - x)$

A-3-2. [同型写像]
ベクトル V とその部分空間 W を考える．このとき、数ベトル空間から V/W への適当な同型写像を構成せよ．

(1) $V = \mathbb{C}^4, W = \langle(1,1,1,0),(1,2,0,0)\rangle$

(2) $V = \mathbb{C}^3, W = \langle(1,0,1),(1,-2,0)\rangle$

B-3-1. [数列からなるベクトル空間]
次の漸化式からなる数列のベクトル空間における基底を求めよ．

(1) $s(\mathbb{C})$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

(2) $s(\mathbb{C})$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$

B-3-2. [数列]
a_n を $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$ を満たす実数列とする．このとき、$b_n = a_{n+1}a_n$ が満たす漸化式を求めよ．

B-3-3. [有限生成ベクトル空間]
有限生成ベクトル空間には必ず、有限個の基底が存在することを示せ．

B-3-4. [無限生成ベクトル空間]
区間 $[0, 2\pi]$ において、$f(0) = f(2\pi)$ を満たす連続関数全体の成すベクトル空間を $C(S^1)$ とする．この $C(S^1)$ は有限生成でないことを示せ.
（ヒント：三角関数のなす部分ベクトル空間が有限生成でないことを示せ.）

B-3-5. [部分ベクトル空間の次元]
$W \subset V$ を有限次元ベクトル空間 V 内の部分ベクトル空間とする．このとき、$\dim(W) \leq \dim(V)$ であることを示せ．さらに、$\dim(W) = \dim(V)$ なら、$W = V$ であることを示せ.

B-3-6. [直和]
次のベクトル空間 V_1, V_2 は V の和として書けるか？もし書ければ証明を、そうでない場合はそう書けないベクトルを探せ.

(1) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V | \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \right\},\ V_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V | \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \right\}$

(2) $V = \mathbb{R}[x],\ V_1 = \{ f(x) \in V | f'(x) = f(x) \},\ V_2 = \{ f(x) \in V | f'(x) = 0 \}$

(3) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \langle {}^t(1, 2, -1), {}^t(0, 1, 1) \rangle,\ V_2 = \langle {}^t(1, 1, -2) \rangle$

B-3-7. [共通部分のベクトル空間]
次の２つのベクトル空間の共通部分のベクトル空間の基底を求めよ.

(1) $V = \mathbb{C}^4, V_1 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V | \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \right\},\ V_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V | \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \right\}$

(2) $V = \mathbb{C}[x]_2\ V_1 = \langle 1 + x + x^2, 1 - x + x^2 \rangle, V_2 = \langle 1 + x^2, x + x^2 \rangle$

(3) $V = \mathbb{C}[x]_3, V_1 = \langle 1 + x, x + x^2 \rangle, V_2 = \langle 1 + x, x + x^2 \rangle$

B-3-8. [補空間の構成]
複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ のスカラーを実数に制限することによって, $\mathbb{C}^2$ を実ベクトル空間とみなすことにする.

1. $\dim(\mathbb{C}^2) = 4$ を示せ.
2. $\mathbf{C}^2 = W \oplus \mathbb{R}^2$ をみたす $\mathbb{C}^2$ の部分空間 W の基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を１組与えよ.

C-3-1. [同型写像]
次の条件を満たす線形写像 $V \to W$ として同型写像を構成せよ.

(1) $f : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{C}^4, F(1 + x + x^2 + x^3) = (1, 0, 0, 0), F(1 + x^3) = (0, 0, 0, 1)$

(2) $f : C(\mathbb{R}) \supset \langle \sin(x), \cos(x) \rangle = V \to V, F(\sin(x) + \cos(x)) = \sin(x - \dfrac{\pi}{2})$

C-3-2. [不変部分空間]
$V = \mathbb{R}[x]_3$ とする．$\boldsymbol{v}_1 = 1 + x + x^2, \boldsymbol{v}_2 = x - x^3, \boldsymbol{v}_3 = 1 + x - x^2, \boldsymbol{v}_4 = x + 2x^2 + x^3$ とする．$f : V \to V$ を線形写像とする．$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ とする．$f(\boldsymbol{v}_1) = 1 + ab + (1 + b + ab)x + (1 + ab)x^2 - bx^3, f(\boldsymbol{v}_2) = a + (1 + a)x + ax^2 - x^3$ とすると、W は f-不変部分空間であることを示せ.

C-3-3. [同型写像]
V を n 次元複素ベクトル空間とする．線形同型写像 $F : \mathbb{C}^n \to V$ を選ぶことと、V 上に基底を選ぶことは同値であることを示せ.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.