

線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第4回 ('16年5月13日：Keywords・・・商空間再訪)

今日の課題.

1. 商空間について理解する.
-

まとめ.

4-1. 同値関係・・・集合 S 上の関係とは、 $S \times S$ のある部分集合 A のことをいう。 A が同値関係であるとは、次の公理が満たされることである。 $a, b, c \in S$ に対して、

1. $(a, a) \in A$ である。(反射律)
2. $(a, b) \in A$ ならば $(b, a) \in A$ である。(対称律)
3. $(a, b) \in A$ かつ $(b, c) \in A$ ならば、 $(a, c) \in A$ である。(推移律)

$A \subset S$ が同値関係であるとき、 $(a, b) \in A$ のことを $a \sim b$ とかく。また、集合 S に上のような A を決めることを、 S に同値関係を入れるという。

4-2. 商空間・・・ベクトル空間 V とその部分空間 $W \subset V$ に対して V に同値関係をいれる。 $v, w \in V$ に対して、

$$v \sim w \Leftrightarrow v - w \in W$$

と定義する。この関係によって構成される同値類全体を V/W とかき、自然にベクトル空間となる。このベクトル間を商空間という。

4-3. 単項式・・・ x, y, z などを多項式の不定元とする。 $x^2, x^3y^3, xy^{10}z^2$ のような形の式を単項式という。

4-4. $\mathbb{K}[x]$ のある部分空間・・・ V を多項式からなるベクトル空間 $\mathbb{K}[x]$ とする。 $f(x) \in V$ とする。このとき、 $f(x)V$ を $\{f(x)g(x) | g(x) \in V\}$ とする V の部分ベクトル空間とする。

A-4-1. [商空間の同値関係]

ベクトル空間 V と部分空間 W に対する商空間を定義したときに導入した関係は同値関係であることを確かめよ。

A-4-2. [商空間]

$V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ とし、これらの3つのベクトルは V 上で一次独立であるとする。 $V/\langle v_3 \rangle$ は $\langle v_1, v_2 \rangle$ と同型となることを示せ。

A-4-3. [商空間の次元]

$W \subset V$ を有限次元ベクトル空間上の部分ベクトル空間とする。このとき、

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

であることを示せ。

B-4-1. [商空間の代表元]

次のベクトル空間と部分ベクトル空間 W に対して、 V/W の代表元を選べ。

- (1) $V = \mathbb{C}^2, W = \left\{ \mathbf{x} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\}$
- (2) $V = \mathbb{C}^3, W = \left\{ \mathbf{x} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\}$
- (3) $V = \mathbb{C}^3, W = \left\{ \mathbf{x} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\}$
- (4) $V = \mathbb{C}[x]_4, W = \langle 1 + x, x^2 + x^4 \rangle$
- (5) $V = \langle \cos \theta, \sin \theta, \theta \cos \theta, \theta \sin \theta \rangle_{\mathbb{R}}, W = \langle \cos \theta + \sin \theta, (1 + \theta) \cos \theta \rangle_{\mathbb{R}}$
- (6) $V = \mathbb{C}^4, W = \left\{ \mathbf{x} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\}$
- (7) $V = \mathbb{C}^5, W = \left\{ \mathbf{x} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0 \right\}$

B-4-2. [不変補空間]

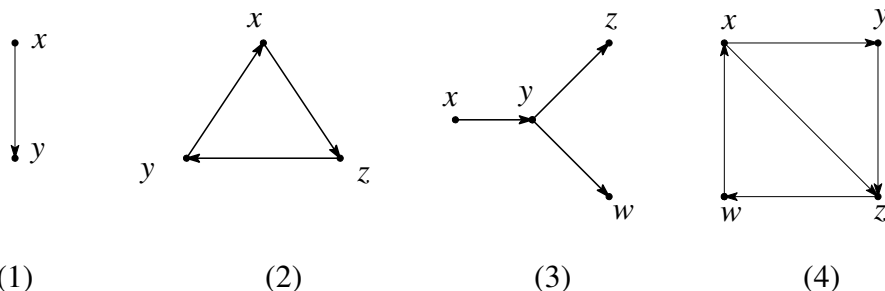
V を有限次元ベクトル空間とする. $f: V \rightarrow V$ を線形変換であるとする. $W \subset V$ を f -不変部分空間であるとする. $f|_W$ の固有値と $\tilde{f}: V/W \rightarrow V/W$ の固有値は全て異なるならば, V において W に対する**不変部分補空間** W' が存在することを示せ. 不変部分補空間とは, $V = W \oplus W'$ かつ, W' は f の不変部分空間であるもの.

B-4-3. [不変部分空間と商空間に誘導する線形写像]

$V = \mathbb{R}[x]$ とする. $W = x^3V$ を 3 次以上の単項式によって生成される V 上の部分ベクトル空間である. $F: V \rightarrow V$ を $F(f(x)) = xf(x)$ として定義する. このとき, F は自然に $V/W \rightarrow V/W$ なる線形写像を誘導することを示し, V/W の適当な基底を使って F の表現行列を求めよ.

B-4-4. [有向グラフがなす線形写像]

次の有向グラフを考える.



V をグラフの頂点を生成元とする形式的複素ベクトル空間とする. 例えば, (1) は $V = \mathbb{C} \cdot x + \mathbb{C} \cdot y$ である. また, $f: V \rightarrow V$ を各頂点に対しては対応する矢印の先の点の和として定義する. V 全体にはその線形拡張として定義する. このとき, f の固有多項式を求めよ.

B-4-5. [2 元体 $\mathbb{F}_2$]

$\mathbb{F}_2$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^3$ において, ${}^t(1, 1, 0), {}^t(1, 0, 1), {}^t(0, 1, 1)$ は一次独立か?

B-4-6. [2 元体 $\mathbb{F}_2$]

$\mathbb{F}_2$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^6$ において, ${}^t(1, 1, 0, 0), {}^t(0, 1, 1, 0), {}^t(0, 0, 1, 1), {}^t(1, 0, 0, 1)$ は $\mathbb{F}_2^4$ の基底となりうるか?

B-4-7. [商空間からの線形写像]

V をベクトル空間とする. $W \subset V$ を部分ベクトル空間とする. $f: V \rightarrow Z$ を線形写像とする. このとき, 自然に線形写像 $\tilde{f}: V/W \rightarrow Z$ が作られるためには $W \subset \text{Ker}(f)$ となる必要がある

十分であることを示せ.

B-4-8. [数列からなるベクトル空間]

次の漸化式からなる数列のベクトル空間における基底を求めよ.

(1) $s(\mathbb{C}), a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

(2) $s(\mathbb{C}), a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$

B-4-9. [数列]

a_n を $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$ を満たす実数列とする. このとき、 $b_n = a_{n+1}a_n$ が満たす漸化式を求めよ.

B-4-10. [無限生成ベクトル空間]

区間 $[0, 2\pi]$ において、 $f(0) = f(2\pi)$ を満たす連続関数全体の成すベクトル空間を $C(S^1)$ とする. この $C(S^1)$ は有限生成でないことを示せ.

(ヒント: 三角関数のなす部分ベクトル空間が有限生成でないことを示せ.)

B-4-11. [行列の空間]

A を 3×3 行列とする. $\langle E, A, A^2 \rangle$ の次元は、 A の条件を使って、どのように振舞うか?

B-4-12. [ラプラスianの固有値]

$V_2 = \langle \sin^n \theta, \cos^n \theta | n = 0, 1, 2 \rangle_{\mathbb{R}}$ とする. 線形変換 $\Delta_2 : V_2 \rightarrow V_2$ を $f(\theta) \mapsto \frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta)$ として定義する. このとき、 Δ_2 の固有値と固有空間を求めよ.

C-4-1. [商空間の基底の代表元]

$V = \mathbb{C}^3$ とし、 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ とする. このとき、 V/W の基底の代表元を選べ. ただし、その代表元が基底であることも証明せよ.

C-4-2. [補空間の表現行列]

$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{C}}$ とする. このとき、 $1 \leq k < n$ に対して、 $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ を V の部分空間とする. $f : V \rightarrow V$ に対して、 W が f -不変部分空間であり、上記の基底に関する表現行列が $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ となるとする. ただし、 A は $k \times k$ 正方行列とする. このとき、誘導された線形変換 $\tilde{f} : V/W \rightarrow V/W$ の表現行列は、 V/W の基底を適当に選ぶことで、 C と一致することを示せ.

C-4-3. [複素平面と多項式空間の商空間との同型写像]

複素平面 $\mathbb{C}$ を実数上のベクトル空間と考える. $V = \mathbb{R}[x]$ とし、 V の部分空間 $(x^2 + 1)V$ に対して以下の問題に答えよ.

(1) 商空間 $V/(x^2 + 1)V$ の基底は、 $[1], [x]$ であることを示せ.

(2) $V/(x^2 + 1)V$ から $\mathbb{C}$ に向けて実ベクトル空間の間の同型写像を構成せよ.

(3) さらに、(2) の同型写像 F をうまく選ぶと、任意の $[f(x)], [g(x)] \in V/(x^2 + 1)V$ に対して、 $F([f(x)g(x)]) = F([f(x)])F([g(x)])$ が成り立つようにできることを示せ.

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：[\(http://motochans.blogspot.jp/\)](http://motochans.blogspot.jp/)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント1ページ目上部。