線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第5回（'16年5月27日：Keywords $\cdots$ 商空間、直交補空間、内積空間）

今日の課題.

1. 内積空間を理解する.

まとめ.

5-1. 双一次形式 ••• V を複素ベクトル空間する．$F: V \times V \to \mathbb{C}$ が次の性質を満たすとき、F は双一次形式とよぶ.

1. $F(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3) + F(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$
2. $F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$
3. $F(\lambda \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \lambda F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$
4. $F(\boldsymbol{v}_1, \lambda \boldsymbol{v}_2) = \bar{\lambda} F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$

さらに、$F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = F(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)$ が成り立つとき、F は対称双一次形式という．代わりに $F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \overline{F(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}$ が成り立てば、F はエルミート双一次形式という．また、$\boldsymbol{v}_1 \neq 0$ に対して、$F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) > 0$ が成り立つとき、F は正定値（双一次）形式という.

5-2. 内積空間 ••• ベクトル空間 V に定義される正定値エルミート双一次形式 F のことを、内積という．内積を持つベクトル空間のことを内積空間（ヒルベルト空間）という.

A-5-1. [補空間の基底]

次の部分ベクトル空間 W の直交補空間の基底を求めよ．ただし、数ベクトル空間には標準的な内積が入っているとする.

(1) $V = \mathbb{C}^3,\ W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $V = \mathbb{C}^4,\ W = \{\boldsymbol{x} \in V | \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 0\}$

A-5-2. [行列のなすベクトル空間]

次の行列 A に対して、部分ベクトル空間 W の基底を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, W = \{X \in M_3(\mathbb{C}) | AX + XA = O\}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, W = \{X \in M_3(\mathbb{C}) | AXA = O\}$

B-5-1. [補空間の基底と商空間の基底]
W' をベクトル空間 V の部分ベクトル空間 W の補空間とする．このとき、W' の基底は自然に、V/W の基底とみなすことができることを示せ.

B-5-2. [直交補空間の基底]
次の部分ベクトル空間 $W \subset V$ の直交補空間の基底を求めよ.

(1) $V = \mathbb{C}^3, W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

(2) $V = \mathbb{C}^4, W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

(3) $V = \mathbb{C}^3, W = \langle \boldsymbol{x} \in C^3 | \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 0 \}$

(4) $V = \mathbb{C}^4, W = \left\{ \boldsymbol{x} \in V | \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 0 \right\}$

B-5-3. [$V/\mathrm{Ker}(f)$ からの写像として誘導される写像]
$f : V \to W$ を線形写像とする．このとき、ある写像 $\tilde{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to W$ が誘導されて、$\tilde{f}$ が単射になることを示せ.

B-5-4. [行列のなすベクトル空間]
次の行列 A に対して、部分ベクトル空間 W の基底を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, W = \{X \in M_2(\mathbb{C}) | AX = A^2 X\}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \{X \in M_3(\mathbb{C}) | AX = XA\}$

B-5-5. [線形写像]
$\mathbb{R}[x]$ を実数係数を持つ多項式全体のなすベクトル空間とする．以下の問題に答えよ.

(1) $V = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] | f(0) = 0\}$ とするとき、V は $\mathbb{R}[x]$ の中で部分空間をなすことを示せ.

(2) $\mathbb{R}[x]/V$ は $\mathbb{R}$ と線型同型であることを示せ.

B-5-6. [線形写像]
$\mathbb{R}[x]$ を実数係数を持つ多項式全体のなすベクトル空間とする．以下の問題に答えよ.

(1) $V_a = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] | f(a) = f'(a) = 0\}$ とするとき、V_a は $\mathbb{R}[x]$ の中で部分空間をなすことを示せ.

(2) $\mathbb{R}[x]/V_a$ は $\mathbb{R}^2$ と線型同型であることを示せ.

(3) $\varphi_t : \mathbb{R}[x]/V_a \to \mathbb{R}$ を $f(x) \mapsto f(t)$ と定めるとき、φ_t は線形写像であることを示し、その像の次元を t に応じて求めよ.

B-5-7. [内積]
$V = \mathbb{R}[x]_2$ とする．F を $F(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f'(x)g(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)g'(x)dx$ として定義するとき、F は双一次形式を定めるか？また内積を定めるか？

B-5-8. [商空間の次元]

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ とする．$W_t = \mathbb{C}^3/\langle \boldsymbol{v}_1, t\boldsymbol{v}_1 + (1-t)\boldsymbol{v}_2\rangle$ として定義する．このとき、$\dim W_t$ は t の値によって、どのように変化するか？

C-5-1. [関数空間上の分解]

$C^\infty(\mathbb{R})$ を実数上で定義された無限回微分可能関数のなすベクトル空間とする．$O_n \subset C^\infty(\mathbb{R})$ を $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 0$ を満たす関数全体とする．このとき、以下の問題に答えよ．

(1) O_n は $C^\infty(\mathbb{R})$ の実部分空間であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}[x]_n$ は $C^\infty(\mathbb{R})$ の実部分空間を成し、

$$\mathbb{R}[x]_n + O_n = \mathbb{R}[x]_n \oplus O_n$$

が成り立つことを示せ．

(3) $C^\infty(\mathbb{R}) = \mathbb{R}[x]_n + O_n$ が言えるか？

C-5-2. [直交補空間の基底]

次の部分ベクトル空間 $W \subset V$ の直交補空間の基底を求めよ．

$$V = \mathbb{C}^4, W = \left\{\boldsymbol{x} \in V \middle| \begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 8\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = 0\right\}$$

C-5-3. [随伴行列]

$A = \begin{pmatrix}1 & 2i & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とする．$V = \mathbb{C}^3$ として、V 上に通常のエルミート内積 $(\cdot,\cdot)$ を定義しておく．このとき、任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して、

$$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, B\boldsymbol{w})$$

を満たすような行列 B が一意に定まり、その行列 B を求めよ．また、そのような行列は、A のどのような行列と言えるか？

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部．