線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 6 回（'16 年 6 月 3 日：Keywords ··· 計量同型、固有値）

今日の課題.
1. 計量同型写像をつくること 2. 固有値、固有空間、対角化可能条件の復習をすること.

まとめ.

6-1. 直交ベクトルの延長 ••• $(V,(\cdot,\cdot))$ を有限次元内積空間とする．$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k$ を互いに直交するベクトルとする．このとき、このベクトルを拡張して、$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ が V の直交基底であるようにできる．この延長を直交ベクトルの延長という.

6-2. 計量同型 ••• V,W を 2 つの内積空間とする．$f:V\to W$ が線形写像であり、任意の $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V$ に対して、$(f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2))=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$ となるとき、f を**計量同型写像**という．有限次元な同型なベクトル空間上の任意の内積空間は全てお互いに計量同型である.

6-3. 直交行列、ユニタリー行列 ••• 実正方行列 P が ${}^tPP=E$ となるとき、P のことを**直交行列**という．A が複素行列のとき、$A^*={}^t\bar{A}$ とおき、**随伴行列**という．複素正方行列 P が $P^*P=E$ となるとき、P のことを**ユニタリー行列**という.

6-4. 正規行列 ••• $A^*A=AA^*=E$ となるような行列のことを**正規行列**という.

6-5. 固有値、固有ベクトル、固有空間 ••• $F:V\to V$ を線形変換とする．ある $\boldsymbol{v}\neq 0$ なるベクトルで、$F(\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{v}$ を満たすとき、λ を F の**固有値**といい、$\boldsymbol{v}$ を λ を固有べくトルという．V が有限次元ベクトル空間である場合、固有値は有限集合となる．λ を固有値とするとき、$V_\lambda=\{\boldsymbol{v}\in V|f(\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{v}\}$ なるベクトル空間を**固有空間**という．定義から、$\dim V_\lambda\geq 1$ である.

6-6. 固有多項式 ••• 有限次元ベクトル空間の間の線形変換 $F:V\to V$ に対して、A を V のある基底に対する F の表現行列とする．このとき、$\Phi_F(t):=\det(tE-A)$ を F の固有多項式という．$\Phi_F(t)$ は、基底の取り方によらず F にしかよらない.

6-7. 正規行列 ••• 正方行列 A が $A^*A=AA^*$ を満たすとき、A は正規行列という.

A-6-1. [固有値、固有空間、固有ベクトル]
次の行列の固有値と固有空間、固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

B-6-1. [直交ベクトルの延長]
次のベクトルを直交基底として延長せよ.

(1) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

B-6-2. [対角化可能判定条件]
次の行列が対角化可能かどうか判定せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (14) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (15) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (17) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (18) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

B-6-3. [直交ベクトルの一次独立性]
$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を互いに直交するベクトルとする．このとき、これらは一次独立であることを示せ.

B-6-4. [直交行列]
n 次直交行列 P を上記のように定義するとき、任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して、標準内積において $(P\boldsymbol{v}_1, P\boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ が成り立つことを示せ.

B-6-5. [計量同型の構成]
$V = \mathbb{R}[x]_2$ に積分を使って、$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ のように内積を入れる．このとき、V から標準内積空間 $\mathbb{R}^3$ に計量同型を構成せよ.

B-6-6. [計量同型写像]
V, W を計量同型な内積空間とする．このとき、V から W への計量同型写像は一意的でないことを示せ.

B-6-7. [固有空間]
固有空間は V の部分ベクトル空間であることを確かめよ.

B-6-8. [随伴行列の固有値]
A を正方行列とする．α を A の固有値とすると、$\bar{\alpha}$ は A^* の固有値であることを示せ.

B-6-9. [正規行列]
A を正規行列とする．$\boldsymbol{v}$ が A の固有値 α の固有ベクトルであれば、A^* の固有値 $\bar{\alpha}$ の固有ベクトルともなることを示せ.

C-6-1. [2 つの内積の間の計量同型写像]
V を有限次元ベクトル空間とする．このとき、V 上の任意の 2 つの内積 $(\cdot,\cdot)_1$ と $(\cdot,\cdot)_2$ がいつでも計量同型であることを、両者の正規直交基底を用いることによって証明せよ.

C-6-2. [対角化可能条件]
A を n 次正方行列とする．A の固有値を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ とする．V_{λ_i} をその固有空間とする．次は同値であることを示せ.

(1) A が対角化可能である.

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim V_{\lambda_i} = n$

(3) A の固有多項式の λ_i の解の重複度が丁度 $\dim V_{\lambda_i}$ である.

C-6-3. [対角化可能]
次の行列は、a がどのような場合に対角化可能となるか？

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -a & 4 & -a+6 \\ a+1 & -3 & a-4 \end{pmatrix}$$

ホームページ：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html**
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(**http://motochans.blogspot.jp/**)
（授業内容など）

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.