線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 7 回（'16 年 6 月 10 日：Keywords ··· 正規行列、符号）

今日の課題.

1. 正規行列の対角化できるようにする.

まとめ.

7-1. 正規行列の性質 ••• 複素正方行列が正規行列であることと、あるユニタリー行列 P によって、$P^{-1}AP$ が対角行列となることは同値である.

特に、正規行列であるなら、その α を A の固有値とすると、$\bar{\alpha}$ は A の固有値であり、それぞれの α の固有空間と $\bar{\alpha}$ の固有空間は $\mathbb{C}^n$ の部分空間として一致する.

7-2. ユニタリー共役 ••• 行列 A, B がユニタリー共役であるとは、あるユニタリー行列 P が存在して、$P^*AP = B$ となることである．ユニタリー共役は、n 次正方行列において同値関係となる.

7-3. エルミート行列 ••• 正方行列 A が $A^* = A$ となること.

7-4. 射影子 ••• $\mathbb{C}^n$ の任意の部分空間 W に対して、$\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp$ なる直交補空間 $W^\perp$ が存在する．線形変換 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を任意の $\boldsymbol{x}_1 \in W$、$\boldsymbol{x}_2 \in W^\perp$ に対して、$f : \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mapsto \mathbf{x}_1$ として定義する．このとき、この f の表現行列 A は $A^2 = A$ かつ $A^* = A$ を満たす．このような線形変換 f のことを射影子という.

7-5. スペクトル分解 ••• 任意の正規行列 A を

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$$

のように、射影子 P_i の線形和に分けることを言う．ここで、P_i は A の固有値 λ_i への射影子である.

7-6. 符号 ••• A をエルミート行列とする．エルミート行列の固有値は、実数である．正の固有空間の次元の和を、p とし、負の固有空間の次元の和を q とするとき、(p, q) を行列 A の符号という．また $p - q$ のことを符号数という.

B-7-1. [ユニタリー共役]
ユニタリー共役は、同値関係であることを示せ.

B-7-2. [正規行列の同値命題]
A を n 次の正方行列とし、$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ をその相異なる固有値とするとき、A が正規行列であることは、固有空間の和が $\mathbb{C}^n$ 全体と一致し、V_{λ_i} が互いに直交することと同値であることを示せ.

B-7-3. [正規行列の同値命題]
正方行列が正規であるためには、$\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ であることを示せ.

B-7-4. [直交する部分空間の射影子]
W, W' を部分空間とし、その射影子を A, A' とする．このとき、$W \perp W'$ であるための必要十

分条件は、$AA' = 0$ であることを示せ.

B-7-5. [正規行列]
$A = B + iC$ とし、B, C がエルミート行列であるとする．このとき、A が正規行列であるためには、$BC = CB$ であることと同値であることを示せ.

B-7-6. [射影子のエルミート性]
任意の W への任意の射影子を f とすると、f はエルミート性 $f^* = f$ を満たすことを示せ.

B-7-7. [正規行列の対角化]
次の行列が正規行列であることを確かめ、あるユニタリー行列によって対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{10} \\ 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{10} & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix}$（$\omega$ は 1 の三乗根）

(9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

B-7-8. [2 次実正規行列の分類]
任意の 2 次の実正規行列は対称行列もしくは交代行列であることを示せ.

B-7-9. [行列の符号]
次の行列の符号を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

C-7-1. [正規行列の射影子によるスペクトル分解]

$P^2 = P$ かつ $P^* = P$ を満たす行列を射影子という．このとき、以下の問題に答えよ．

(1) W, W' を部分空間とし、その射影子を P, P' とする．このとき、$W \perp W'$ であるための必要十分条件は、$PP' = 0$ であることを示せ．

(2) P を正則行列とする．その第 i 列を $\boldsymbol{p}_i$ とする．また、E_i を、(i, i) 成分のみ 1 で、他は 0 となる行列とする．このとき、線形変換 PE_iP^{-1} は、$\boldsymbol{p}_j \mapsto \delta_{ij}\boldsymbol{p}_j$ となる線形変換であることを示せ．ここで、δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

(3) A を n 次正規行列であるとする．$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ を A の相異なる固有値とする．A の固有空間 V_{λ_i} への射影子を P_i とすると、

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r$$

が成り立つことを示せ．ただし、正規行列があるユニタリー行列 U によって対角化できることは用いても良い．ここで、U はユニタリー行列で、$U^{-1}AU = D$ となり、D は対角行列であり、U の縦ベクトルは、A の固有ベクトルと一致する．また、考えにくければ、$r = n$ として考えて良い．

(4) さらに、

$$E = P_1 + \cdots + P_r$$

が成り立つことを示せ．

C-7-2. [正規行列の対角化]

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問題に答えよ．

(1) A は正規行列であることを示せ．

(2) A の固有値と固有空間の基底を求めよ．

(3) A をユニタリー行列によって対角化せよ．

(4) A のスペクトル分解を与えよ．

ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html`
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(`http://motochans.blogspot.jp/`)
（授業内容など）

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.