

線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第8回 ('16年6月17日：Keywords … 2次曲面の分類)

今日の課題.

1. 2次形式の分類を理解する. 2. 2次曲面、2次曲線を標準形を求める.

まとめ.

8-1. シルベスターの慣性の法則と2次形式 … A を実対称行列とする. このとき、ある実正則行列 P で、 tPAP が $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ なる対角行列が存在する. これを、シルベスターの慣性の法則という. ここで、 $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ は、対角成分 a_{ii} が a_i となるような対角行列とする. このとき、 A の符号を (p, q) とすると、 p を上の対角行列のうち、1 の数に等しく、 q は -1 の数に等しい.

(実)2次形式とは、 $x_1, \dots, x_n$ の2次の斉次式であり、一般に、ある実対称行列 A を使って、 ${}^t\mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{x}$ のように書くことができる. ある正則な行列 P を使ってできる次の2次形式 ${}^t\mathbf{x}({}^tPAP)\mathbf{x}$ を ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ と同値な2次形式であるという. よって2次形式の同値類は、シルベスターの慣性の法則を用いると、2次形式は、

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 + \dots \pm x_n^{p+q}$$

に同値である. この同値類は、行列の符号によって完全に分類される.

8-2. アフィン幾何 … ある集合 $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n = V$ がアファイン合同であるとは、ある正則行列 P とベクトル $\mathbf{x} \in V$ が存在して、任意の $\mathbf{v} \in S_1$ に対して、 $P\mathbf{v} + \mathbf{x} \in S_2$ となる $S_1 \rightarrow S_2$ への一対一写像が作れることである. 上のような合同条件を持つ幾何学をアファイン幾何という. V のアファイン合同写像は、 $V \subset \mathbb{R}^{n+1} = V'$ 上の線形変換として表せる. $\mathbf{v} \in V$ に対して、 $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}' \in V'$ なるベクトルを考える.

$$\mathbf{v}' \mapsto \begin{pmatrix} P & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} P\mathbf{v} + \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

一般に、アファイン写像とは、ある行列 A とベクトル $\mathbf{x}$ に対して、 $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} + \mathbf{x}$ となる写像のことである.

8-3. 2次曲線・2次曲面の標準形 … $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ なる曲線を2次曲線という. この式は

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

と書き直すことができる. この2次形式の標準形として、教科書定理 8,3 のような式のどれかに分類される.

8-4. 広義固有空間 … λ を線形変換 f の固有値とする. このとき、 $V_{(\lambda)}$ を

$$\{\mathbf{v} \in V \mid \text{十分大きい } n \text{ に対して、} (\lambda E - A)^n \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

とする. このベクトル空間を広義固有空間という.

B-8-1. [広義固有空間]

固有空間 V_λ は広義固有空間 $V_{(\lambda)}$ の部分空間であることを示せ.

B-8-2. [アファイン写像の合成]

アファイン写像の合成もアファイン写像であることを示せ.

B-8-3. [2次(曲線)曲面の分類]

次の2次曲線 $f(x, y) = 0$ もしくは2次曲面 $f(x, y, z) = 0$ はどのような形か?

- (1) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 2x + 2y$
- (2) $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3y^2 - z^2 - 1$
- (3) $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 2x$
- (4) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x$
- (5) $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 2y - 3$
- (6) $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 2y - 5$
- (7) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 6xz - 6yz + 2xy - 1$
- (8) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - 4xz - 1$
- (9) $f(x, y) = 2x^2 + 6xy - y^2 + 2x + 4y - 2$
- (10) $f(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2 + 6x + 3$
- (11) $f(x, y, z) = -y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2z$
- (12) $f(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 4xz - 4yz + 2z$

C-8-1. [2次曲面の形]

次の2次曲面は c の値によって、どのような2次曲面になるか?

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + cz^2 - 6xz - 2x - 4y + 6z = 0$$

C-8-2. [2次形式の標準化と符号]

A を実対称行列としたとき、任意の実正則行列において、 $A \sim {}^tPAP$ なる同値関係を考える. このとき、この同値関係により、 A の符号は不変であることを示せ.

C-8-3. [アファイン変換]

平面上のある点 (a, b) における θ 回転はアファイン変換であることを示し、 $\mathbb{R}^3$ 上の行列の形でかけ.

ホームページ: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog: (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります. アドレスはプリント1ページ目上部.