

線形代数続論演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第9回 ('16年6月24日：Keywords … ジョルダンブロック分解、図形)

今日の課題.

1. 行列のジョルダンブロックに分けること (固有値が一つしかない場合) 2. 図形が描けること.

まとめ.

9-1. 2次曲線の標準形 … 2次曲線を $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{v} \\ \mathbf{t} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ のように表示

する. ユークリッド変換 (合同変換) により, 下のいずれかに変形できる.

$$(1) \alpha\beta \neq 0 \text{ のとき, } \alpha x_1^2 + \beta y_1^2 + \frac{|\tilde{A}|}{\alpha\beta} = 0$$

$$(2) \beta = 0 \text{ のとき, } \alpha x_2^2 + 2\sqrt{|\tilde{A}|/(-\alpha)} y_1 = 0 \text{ となる.}$$

ここで, α, β は主要部 A の固有値とする. 主要部が $A = O$ の場合は, 1次曲線である.

9-2. 2次曲面の標準形 … 2次曲線を $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{v} \\ \mathbf{t} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ のよう

に表示する. ユークリッド変換 (合同変換) により, 下のいずれかに変形できる.

$$(1) \alpha\beta\gamma \neq 0 \text{ のとき, } \alpha x_3^2 + \beta y_3^2 + \gamma z_3^2 + \frac{|\tilde{A}|}{\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$(2) \beta = 0 \text{ のとき, } \alpha x_4^2 + \beta y_4^2 + 2\sqrt{|\tilde{A}|/(-\alpha\beta)} z_4 = 0 \text{ となる.}$$

ここで, α, β, γ は主要部 A の固有値とする. 主要部が $A = O$ の場合は, 1次曲線である.

9-3. 広義固有空間分解 … 線形変換 $f: V \rightarrow V$ の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を相異なる固有値とする. このとき, V は広義固有空間 $V_{(\lambda_i)}$ の和に分解される. つまり,

$$V \rightarrow \oplus_{\lambda} V_{(\lambda)}$$

となる.

9-4. ジョルダンブロック分解 … 行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ のような形のブロック行列に分けること.

A-9-1. $[(A + \lambda E)^n]$ の核を求めること .]

$$(1) \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

B-9-1. [曲線、曲面の形]

次の式 $f(x)$ から、曲線、および、曲面が何か答えよ .

$$(1) f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + x$$

$$(2) f(x, y) = x^2 + 4xy + 2x - y^2 + 4y + 1$$

$$(3) f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 4x + y^2 - 2y$$

$$(4) f(x, y) = 1 + 2x + x^2 + 4y + 2xy + y$$

$$(3) f(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + y^2 + 4y + 1$$

$$(6) f(x, y) = 1 + 2x + x^2 + 6y - 2xy + y^2$$

$$(7) f(x, y) = 1 + 2x + x^2 + 6y + 4xy + y^2$$

$$(8) f(x, y) = 1 + 6x + x^2 + 2y + 2y^2$$

$$(9) f(x, y, z) = 2x^2 + 6xy - 6xz + 2x + y^2 - 8yz + 2y + z^2 + 2z + 1$$

$$(10) f(x, y, z) = 1 + 2x + 2x^2 + 2y - 8xy + y^2 + 2z - 8xz - 6yz + z^2$$

$$(11) f(x, y, z) = 1 + 2x + 2x^2 + 2y - y^2 + 2z + z^2$$

$$(12) f(x, y, z) = 1 + 2x + 2x^2 + 2y + 4xy - y^2 + 2z + z^2$$

$$(13) f(x, y, z) = 1 + 2x + x^2 + 2y - 2xy - y^2 + 2z + 2xz - 6yz - z^2$$

$$(14) f(x, y, z) = 1 + 2x + x^2 + 2y - y^2 + 2z - 6yz - z^2$$

B-9-2. [行列のジョルダンプロック分解]

次の行列は固有値が 1 の行列である . この行列のジョルダンプロックを与えるような基底を求めよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 7 & 2 & -10 \\ -3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} -56 & -3 & 42 \\ 19 & 2 & -14 \\ -76 & -4 & 57 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 & 2 \\ -5 & -3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(11) \begin{pmatrix} 7 & 6 & -10 & 3 \\ -4 & -3 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 7 & 6 & -10 & 3 \\ -5 & -3 & 8 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(13) \begin{pmatrix} 4 & 5 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(14) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(15) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(16) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(17) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 1 \\ -3 & 1 & 8 & -1 \\ 3 & 0 & -7 & 1 \\ 15 & 0 & -40 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(18) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -7 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(19) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -11 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -6 & -3 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(20) \begin{pmatrix} 6 & 1 & -8 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -11 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & -4 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(21) \begin{pmatrix} 6 & 1 & -10 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -11 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & -5 & 2 & -7 \\ -3 & 0 & 9 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(22) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & -3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(23) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(24) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(25) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & -11 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & -7 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

C-9-1. [ジョルダン分解]

次の行列について問題に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値 λ を求めよ．
- (2) $A - \lambda E$ の核を求めよ．
- (3) $(A - \lambda E)^2$ の核の基底を求めよ．
- (4) A のジョルダンブロック分解を求めよ．

C-9-2. [ジョルダン分解]

次の行列について答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 次の行列の広義固有空間の図形を与えよ．
 - (2) ジョルダンブロック分解を与えよ．
-

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/senzoku.html>
(主にプリントのダウンロード用)

blog：[\(http://motochans.blogspot.jp/\)](http://motochans.blogspot.jp/)
(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント1ページ目上部．