トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

注１：「それぞれに、答えよ」となっているものは以下の小問全てに答えること．そのように書かれていない問題は小問一つで一解答と考える．

注２：§3,4,5、§6,7、§8,9,10、§11,12,14、§16、§17、§18 でそれぞれ 1 問以上解くこと．

---

§1 集合・不等式・連続関数

$\boxed{\text{問題 1-1}}$ [不等式]

任意の実数 x, y に対して、$|x^n - y^n| \leq |x-y|\cdot(|x|+|y|)^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{問題 1-2}}$ [コーシーシュワルツの不等式]

$\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2$ を示せ．

$\boxed{\text{問題 1-3}}$ [半円と $\mathbb{R}$ の間の全単射]

半円を

$$S^1_+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2=1, x>0\}$$

として定義する．次の写像 $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．$y \in (-1,1)$ とする．S^1_+ 上の点 (x,y) に対して、原点と (x,y) を通る直線の傾きを $\varphi(y)$ として定義する．このとき $\varphi(y)$、また、その逆写像を計算せよ．

$\boxed{\text{問題 1-4}}$ [積分 0 の連続関数]

$f(x)$ を $I=[0,1]$ 上連続で、任意の $x\in I$ において $f(x)\geq 0$ となる関数とする．$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$ ならば、$f(x)$ は I 上恒等的に 0 であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 1-5}}$ [非可算集合]
$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ は非可算集合であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 1-6}}$ [$C(\mathbb{R})$ の濃度]
$\mathrm{card}(C(\mathbb{R}))=\mathfrak{c}$ であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 1-7}}$ [カントール集合]
カントール集合 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots$ に対して、ある 2 以上の整数 r に対して、

$$\varphi_r:\{0,1\}^{\mathbb{Z}}\to[0,1]$$

$$\varphi_r(\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{n\geq 1}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r-1}{r^n}a_n$$

と置く．このとき、φ_2 は単射ではないが全射であり、φ_r $(r\geq 3)$ なら全射ではないが単射であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 1-8}}$ [カントール集合]

$$\Phi:2^{\omega}=\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]\qquad\left(\Phi((x_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{3^n}\right)$$

なる写像 Φ を定義する．$[0,1]$ から $(1/3,2/3)$ を除いた集合を T_1 とおく．また、T_1 から $(1/9,2/9)\cup(7/9,8/9)$ を除いた空間を T_2 とおく．同じように、T_{n-1} から、$(1/3^n,2/3^n)\cup(7/3^n,8/3^n)\cup\cdots((3^n-2)/3^n,(3^n-1)/3^n)$ を除いた空間を T_n とおく．つまり、T_n は T_{n-1} のそれぞれの区間を 3 分割し、その中央の開区間を除いてできる集合である．このとき $T=\cap_{n=1}^{\infty}T_n$ とおくと、T は $\Phi(2^{\omega})$ と一致することを示せ．

（2^{ω} と $[0,1]$ は問題 68 とベルンシュタインの定理を使えば濃度はどちらも連続濃度である.（逆単射は $[0,1]$ の無限小数 2 進展開を用いればよい.）2^{ω} は完全不連結であるが、$[0,1]$ は連結集合でありその間に同相写像をつくることはできない.）

---

§2 距離空間

$\boxed{\text{問題 2-1}}$ [距離空間]
以下の問題に答えよ．ただし、I は単位区間 $[0,1]$ のこととする．

1. $\mathbb{R}^{\infty}$ は $d_{\infty}(x,y)=\sqrt{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$ を距離関数とする距離空間となることを示せ．
2. $f,g\in C(I)$ に対して、$d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)||x\in I\}$ と定義する．このとき、$(C(I),d)$ は距離空間になることを示せ．
3. $f,g\in C(I)$ に対して、$d'(f,g)=\sqrt{\displaystyle\int_0^1(f(x)-g(x))^2dx}$ として定義する．このとき、$(C(I),d')$ は距離空間となることを示せ．

4. $\mathbb{R}^n$ の 2 元 $x=(x_1,..,x_n)$ と $y=(y_1,..,y_n)$ に対して、$d'_n(x,y)=|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|$ とすると、d'_n は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数となることを示せ.

5. $x,y\in\mathbb{R}^n$ を $d^*_n(x,y)=\max\{|x_i-y_i||i=1,..,n\}$ とすると、$(\mathbb{R}^n,d^*_n)$ は距離空間になることを示せ.

6. $l,m\in\mathbb{Z}$ に対して、$\rho(l,m)=\varphi_p(l-m)$ とすると、この ρ は $\mathbb{Z}$ 上の距離関数となることを示せ.

7. 自然数からなる数列 $\{x_1,x_2,...\}$ 全体の集合を $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の任意の 2 元 $x=\{x_1,x_2,...\},y=\{y_1,y_2,...\}$ に対して、

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1/n & x_i=y_i(i<n) \text{ で } x_n\neq y_n \text{ のとき、}\\ 0 & x_i=y_i(i\in\mathbb{N})\end{cases}$$

と定める．このとき、ρ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の距離関数となることを示せ.

$\boxed{\text{問題 2-2}}$ [開集合]
(X,d) を距離空間とする．X の任意の有限個の開集合の共通部分は開集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 2-3}}$ [開集合]
(X,d) を距離空間とする．任意個の開集合の和集合は開集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 2-4}}$ [距離空間の開集合]
距離空間 (X,ρ) において、X の任意の 2 点 x,y に対し、

$$\tilde{\rho}(x,y)=\min(\rho(x,y),1)$$

とおけば、$\tilde{\rho}$ は集合 X 上の距離関数であって、$A\subset X$ とするとき、

$$A \text{ は } (X,\rho) \text{ の開集合} \Leftrightarrow A \text{ は } (X,\tilde{\rho}) \text{ の開集合}$$

$\boxed{\text{問題 2-5}}$ [距離空間の開集合]
距離空間 (X,ρ) において、X の任意の 2 点 x,y に対し、

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

とおけば、$\tilde{\rho}$ は集合 X 上の距離関数となり、$A\subset X$ とするとき、

$$A \text{ は } (X,\rho) \text{ の開集合} \Leftrightarrow A \text{ は } (X,\tilde{\rho}) \text{ の開集合}$$

$\boxed{\text{問題 2-6}}$ [距離関数となるための条件]
集合 X の任意の 2 元 x,y に対して、実数 $\rho(x,y)\geq 0$ が定められ、以下の性質を満たすとき、ρ は X 上の距離関数となることを示せ.

- $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$
- 任意の 3 元 x,y,z に対して $\rho(x,y)\leq\rho(z,x)+\rho(z,y)$ が成り立つ.

$\boxed{\text{問題 2-7}}$ [連続写像]
次の写像 f が連続であることを示せ．ただし、$\mathbb{R}^n$ には普通のユークリッド距離が入っているとする. $C(I)$ 上の距離は $d(\phi,\psi)=\sup\{|\phi(x)-\psi(x)||x\in I\}$ とする.

1. $f:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d)$ を $\varphi(x)=x^n$ とする．$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\epsilon}{(2|x|+1)^{n-1}}\right\}$ として考えてみよ.

2. $f : (\mathbb{R} - \{0\}, d) \to (\mathbb{R}, d)$ を $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする．

3. $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = d(x, A)$ とする．

4. $f : (C(I), d) \to \mathbb{R}:\ f(\phi) = \displaystyle\int_0^1 \phi(t)dt$

5. 距離空間 (X, d) において、A, B を互いに素な空でない閉集合とする．このとき、

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

$\boxed{\text{問題 2-8}}$ [開集合]
２次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において、２つの距離を

$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

とする．このとき、距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ と $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合全体は一致することを示せ．

$\boxed{\text{問題 2-9}}$ [非アルキメデス距離関数]
ρ が X の非アルキメデス距離関数ならば、$U(p; \epsilon)$ は (X, ρ) の閉集合となることを示せ．

$\boxed{\text{問題 2-10}}$ [距離空間の間の連続写像と位相空間としての連続写像]
(X_1, d_1) および (X_2, d_2) を距離空間とし、$\mathcal{O}_j$ を d_j によって定まる距離位相とする．写像 $f : X_1 \to X_2$ について、f が距離空間 (X_1, d_1) から (X_2, d_2) への連続写像であることと、f が位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から $(X_2, \mathcal{O}_2)$ への連続写像であることは、同等（同値）であることを確かめよ．

$\boxed{\text{問題 2-11}}$ [ルベーグ数]
(X, d) をコンパクト距離空間とする. このとき、ルベーグ数として正の実数がとれることを示せ.

$\boxed{\text{問題 2-12}}$ [離散位相の距離化]
離散位相は常に距離化可能であり、密着位相は一般に距離化可能でないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 2-13}}$ [3 点上の距離化可能位相空間]
$\{1, 2, 3\}$ 上の位相に対して、距離化できるものを全て求めよ．

$\boxed{\text{問題 2-14}}$ [p-**進距離**]
p を固定された素数とする．$\forall n, m \in \mathbb{Z}$ に対して、k を $n - m$ を割り切る最大の p のべきとする．このとき $|n - m|_p = 2^{-k}$ とすると、$|\cdot|_p$ は $\mathbb{Z}$ 上の距離となることを示せ．

$\boxed{\text{問題 2-15}}$ [距離空間より強い位相空間]
距離空間より強い位相は距離空間であるか？

---

§3 内点・外点

$\boxed{\text{問題 3-1}}$ [内点・境界点・外点]
距離空間上の部分空間 A の境界点を任意の $\epsilon > 0$ に対して、$U(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $U(x, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ を満たす x 全体だとすると、境界点は内点でも外点もない点であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-2}}$ [部分集合との距離]
距離空間 (X, d) とその部分集合 A において、$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ が成り立つことを示せ．

ヒント：ある $a \in A$ を使って、三角不等式を用いよ．

$\boxed{\text{問題 3-3}}$ [触点であるための必要十分条件]
$x \in A$ が A の触点であるための必要十分条件は、$d(x, A) = 0$ となることであることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-4}}$ [内点であるための必要十分条件]
$x \in A$ が A の内点であるための必要十分条件は、$d(x, A^c) > 0$ となることであることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-5}}$ [集積点・閉包・触点]
以下の問題に答えよ．

1. $\mathbb{R}$ 上の区間、(a, b) の閉包は $[a, b]$ であることを示せ．
2. $\mathbb{R}^2$ 上の区画、$(a, b) \times (c, d)$ の閉包は $[a, b] \times [c, d]$ であることを示せ．
3. $\{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ の集積点は 0 のみであることを示せ．
4. $A = \{(1/m, 1/n) | n, m \in \mathbb{Z}, n, m > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ を考える．$\mathbb{R}^2$ には通常の距離が入っているとして、A の集積点は、$(0, 1/n), (1/m, 0)$、および $(0, 0)$ と一致することを示せ．
   ヒント：触点であれば、A から距離零になる．つまり、いくらでも近い点が存在することを示せ．
5. 有理数全体の閉包は実数全体であることを示せ．
6. (X, d) を距離空間とする．部分集合 $A \subset X$ に対して収束する A の点列 x_n の収束点 x は A の触点であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-6}}$ [ϵ-近傍の閉包]
距離空間 (X, ρ) において、

$$\mathrm{Cl}(U(x; \epsilon)) \subset \{y \in X | \rho(x, y) \leq \epsilon\}$$

を示し、等号が成立しない例をあげよ．

$\boxed{\text{問題 3-7}}$ [部分集合の距離と直径]
距離空間 (X, ρ) において、$A, B \subset X$ とするとき、以下のそれぞれを証明せよ．

1. $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \rho(A, B) + \delta(B)$
2. $\delta(Cl(A)) = \delta(A)$

$\boxed{\text{問題 3-8}}$ [導集合]
位相空間 X の部分集合 A の集積点全体の集合を A の**導集合**といい、A^d で表す．X が距離空間のとき、A^d は閉集合であることを示し、また、$A, A^d, (A^d)^d$ が全て違う例を作れ．

$\boxed{\text{問題 3-9}}$ [部分集合の内部]
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$(Y, \mathcal{O}_Y)$ をその部分空間とする．すべての X の部分集合 A に対して $\mathrm{Int}_X(A) \cap Y$ が Y の中で A の内部になることと Y が X の中で開集合であることは同値であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-10}}$ [集積点]
位相空間 X において、次を示せ．

$$x \text{ が集積点 } \Leftrightarrow x \in \mathrm{Cl}(X - \{x\})$$

$\boxed{\text{問題 3-11}}$ [クラトウスキーの方法]
X を集合とする．X の各部分集合 A に対し X の部分集合 $u(A)$ を対応させる写像 $u : \rho(X) \to \rho(X)$ ($\rho(X)$ は X のべき集合）があって A, B を X の任意の部分集合とするとき、次の 4 条件件を満たすものとする．

(i) $A \subset u(A)$

(ii) $u(u(A)) = u(A)$

(iii) $u(A \cup B) = u(A) \cup u(B)$

(iv) $u(\emptyset) = \emptyset$

このとき、$\mathfrak{T} = \{X - A | A \in \rho(X), u(A) = A\}$ は X の一つの位相となり、この位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ における閉包 $\mathrm{Cl}(A)$ は $u(A)$ と一致する．

$\boxed{\text{問題 3-12}}$ [内部・外部・境界点]
X は A の内部、外部、境界の直和となることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-13}}$ [閉包・内点・境界点]
次の等式を示せ．$\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Bd}(A)$、$\mathrm{Cl}(A) = X - \mathrm{Int}(X - A)$、$\mathrm{Bd}(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X - A)$

$\boxed{\text{問題 3-14}}$ [内部]
A, B を X の部分集合とするとき、次のことが成り立つことを示せ．

(1) $\mathrm{Int}(A) \subset A$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

(2) $\mathrm{Int}(X) = X$, $A \subset B$ ならば、$\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$

$\boxed{\text{問題 3-15}}$ [$\mathbb{R}$ 上の部分集合]
$\mathbb{R}$ の中の集積点を持たない部分集合は高々可算集合であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-16}}$ [内点]
A に含まれる最大の開集合として A の内点を定義するとする．このとき、x が位相空間 X の部分集合 A の内点であるとき、X のある開集合 U が存在して $x \in U \subset A$ であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-17}}$ [触点]
A の触点 $\bar{A}$ を、A を含む最小の閉集合と定義する．そのとき、x が位相空間 X の部分集合 A の触点であるとき、X の任意の開集合 U に対して $A \cap U \neq \emptyset$ であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-18}}$ [内点]
A を位相空間 X の部分集合とする．A^i を A に含まれる最大の開集合とする．$\overset{\circ}{A}$ を A の部分集合で、任意の $x \in \overset{\circ}{A}$ において、開集合 U が存在して $x \in U \subset A$ となる点全体とする．このとき、$\overset{\circ}{A}$ は A^i に一致することを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-19}}$ [導集合と閉包]
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，A を X の部分集合とする．また、A^d(導集合という) を任意の $\epsilon > 0$ に対して、$U_\epsilon(x) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ である点とする．$\bar{A}$(A を含む最小の閉集合) と導集合 A^d について、$\bar{A} = A \cup A^d$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{問題 3-20}}$ [集積点]
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の有界な点集合には、集積点が含まれることを示せ．有界な点集合 S とは、ある正の数 R があり、任意の $x \in S$ に対して、$||x|| < R$ となることをいう．

---

§4 開集合・閉集合

$\boxed{\text{問題 4-1}}$ [閉集合の無限個の和集合]
閉集合の無限個の和集合が開集合となる例をあげよ.

$\boxed{\text{問題 4-2}}$ [開集合の無限個の共通部分]
開集合の無限個の共通部分が閉集合となる例をあげよ.

$\boxed{\text{問題 4-3}}$ [集合を含む最小の閉集合]
$A \subset X$ を部分集合とする．$\mathrm{Cl}(A)$ は A を含む最小の閉集合である．つまり、A を含む閉集合のすべての共通部分であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 4-4}}$ [$\mathbb{R}$ 上の開集合]
通常の距離位相における $\mathbb{R}$ において、$[a, b)$ および、$[a, b]$ は開集合ではないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 4-5}}$ [開集合の正則性]
位相空間 X の開集合 G は、$G = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G))$ となるとき、正則という．次の問題に答えよ.

1. A が閉集合なら、$\mathrm{Int}(A)$ は正則である.
2. U, V が正則なら、$U \cap V$ も正則である.

$\boxed{\text{問題 4-6}}$ [開集合と部分空間の開集合]
X を位相空間、A を X の閉集合とする．U を部分空間 A の開集合 V を、$U \subset V$ を満たす X の開集合とすると、$U \cup (V - A)$ は X の開集合となることを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 4-7}}$ [閉集合]
X を位相空間を開集合系を使って定義するとき、次のことが成り立つことを示せ.

(1) X および、空集合 $\emptyset$ は閉集合である.

(2) 有限個の閉集合の和集合は閉集合であることを示せ.

(3) 有限個、もしくは無限個の共通部分は閉集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 4-8}}$ [閉集合]
A, B を位相空間 X の部分集合とするとき、次のことが成り立つことを示せ.

(1) $A \subset \mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$

(2) $\mathrm{Cl}(X) = X$, $A \subset B$ ならば、$\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(B)$

$\boxed{\text{問題 4-9}}$ [境界集合]
任意の部分集合 A の境界集合 $\mathrm{Bd}(A)$ は閉集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 4-10}}$ [距離空間上の閉集合]
距離空間 (X, d) において、A をその閉集合とする.

$$x \in A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

を示せ.

$\boxed{\text{問題 4-11}}$ [境界点]
A を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合とする．このとき、$\forall x \in A^f$ に対して $x \in U$ となる開集合 U は、$U \cap A^i \neq \emptyset$ かつ $U \cap A^e \neq \emptyset$ を満たすことを示せ.

$\boxed{\text{問題 4-12}}$ [上限位相と距離位相]
以下の問題にそれぞれこたえよ.

(1) 上限位相において、(a,b) が開集合であることを示せ.

(2) 通常の距離位相 $(\mathbb{R},\mathcal{O}_d)$ において、$(a,b]$ が開集合にならないことを示せ.

問題 4-13 [距離空間上の不等式で得られる領域]
$f(x)$ を実数上の連続関数とする．簡単のため多項式でもよい．X を距離空間とし、$p\in X$ となる任意の点とする．このとき、

$$U=\{q\in X|f(d(p,q))<0\}$$

で定められる集合 U は X の開集合であることを示せ.

問題 4-14 [一点を共有する位相空間]
$S=X\cup Y$ とし、X,Y はただ 1 点 x_0 を共有する位相空間とする．S の部分集合 A は $A\cup X$,$A\cap Y$ がそれぞれ X,Y の開集合となるとき、S の開集合と定める．このとき、S は $X\times Y$ の部分空間 $X\times\{x_0\}\cup\{x_0\}\times Y$ と同相になることを示せ.

問題 4-15 [閉集合の内部全体]
$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．閉集合の内部全体 $\mathcal{O}'=\{F^i|F:closed\}$ は X の位相 $\mathcal{O}$ と一致するか？ここで、F^i は F の内部.

---

§5 近傍

問題 5-1 [距離空間の ϵ-近傍系]
距離空間 (X,d) において、$\mathcal{U}(x)=\{\{y\in X|d(y,x)<\epsilon\}|\epsilon>0\}$ とすると、$\{\mathcal{U}(x)\}$ は距離空間の近傍系であることを示せ.

問題 5-2 [近傍系、近傍基]
次の問題に答えよ.

1. 2 つの近傍系 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ が同一の位相を定めるための必要十分条件は、各点において、

   (a) 任意の $V\in\mathcal{V}(x)$ に対し $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$ となる $U\in\mathcal{U}(x)$ が存在し、
   (b) 任意の $U\in\mathcal{U}(x)$ に対し $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ となる $V\in\mathcal{V}(x)$ が存在する

   ことが必要十分であることを示せ.

2.

3. (X,d) を距離空間とし、$\mathcal{O}$ を d によって定まる距離位相とする．位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において、

   $$\mathfrak{B}(x)=\left\{N\left(x;\frac{1}{n}\right)|n\in\mathbb{N}\right\}$$

   は点 x の近傍基であることを示せ.

問題 5-3 [近傍系、近傍基]
$\{\mathcal{U}(x)|x\in X\}$ を位相空間 X の近傍系であるとする．このとき、$\mathcal{U}(x)$ は x における X の近傍基になることを示せ.

問題 5-4 [p-進位相]
p-進距離によって定義された $\mathbb{Z}$ 上の位相における近傍基を求めよ.

問題 5-5 [ある非可算集合上の位相]
X を非可算集合とする.

1. $x_0 \in X$ に対して、x_0 の近傍を $x_0 \in U$ となる $U \subset X$ であり、$X - U$ が可算集合となるものだけを考える．また、$x \neq x_0$ なる $x \in X$ においては、$\{x\}$ だけを近傍とする．このような近傍系をとると、X 上に位相を定義できることを示せ.

2. 上のような位相空間 X において、$A = X - \{x_0\}$ は x_0 の集積点であるが、x_0 とは異なる点よりなる点列 $\{a_n\}$ は決して x_0 に収束しないことを示せ.

3. X を上のように定義された位相空間とする．Y を X 上に離散位相を与えた位相空間とする．$f : X \to Y$ を恒等写像とする．この f は、この 3 つ前の問題の逆は成り立っているといえるか？

$\boxed{\text{問題 5-6}}$ [基本近傍系]
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の通常の距離位相において、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ において
$\mathcal{B}(x) = \left\{ B_n\left(x; \frac{1}{n}\right) | n \in \mathbb{N} \right\}$ が基本近傍系をなすことを示せ.

---

§6 位相空間

$\boxed{\text{問題 6-1}}$ [位相空間]
次の問題に答えよ.

1. $\mathbb{R}$ 上の部分集合の族を $\mathcal{O} = \{(a, \infty) | a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\} \cup \{\emptyset\}$ とすると、$(X, \mathcal{O})$ は位相空間になることを示せ.

2. 有限補集合位相が位相空間であることを確かめよ.

3. 順序位相 $(X, \mathcal{O}_{\leq})$ は位相空間となることを確かめよ.

4. $(X, \mathcal{O})$ が位相空間とする．$A \subset X$ を部分集合とする、$\mathcal{O}_A$ を $\{A \cap U | U \in \mathcal{O}\}$ とするとき、$(A, \mathcal{O}_A)$ は位相空間であることを確かめよ.

5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．A を X の任意の部分集合とする．このとき、$\mathcal{O}(A) = \{A \cup O | O \in \mathcal{O}\} \cup \{\emptyset\}$ とする．このとき、$\mathcal{O}(A)$ は X 上の位相空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 6-2}}$ [位相の数]
次の集合の上に定義される位相の総数を求めよ.

1. $\{1, 2\}$

2. $\{1, 2, 3\}$

$\boxed{\text{問題 6-3}}$ [位相の数]
次の集合の上に定義される位相の同相類を求めよ.

1. $\{1, 2\}$

2. $\{1, 2, 3\}$

$\boxed{\text{問題 6-4}}$ [有限集合上の位相]
有限集合上の距離空間は離散空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 6-5}}$ [離散空間]
位相空間 X が離散空間であるためには, 一点集合がすべて開集合となることが必要十分であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 6-6}}$ [2・3 点集合からなる位相空間から決まる順序集合]
X を任意の n 点集合上の位相空間とする．$x \in X$ に対して、U_x を x を含む最小の開集合とする．任意の $x, y \in X$ において、$y \in U_x$ となるとき、$x \leq y$ と定義することで、X 上の順序集合を以下の場合明らかにせよ．

1. $n = 2$ の場合．
2. $n = 3$ の場合．

$\boxed{\text{問題 6-7}}$ [ゾルゲンフライ直線（上限位相、下限位相）]
ゾルゲンフライ直線（下限位相（右半開区間位相））、上限位相（左半開区間位相）、において以下の問題に答えよ．

1. 上（及び下）限位相に近傍系を導入せよ．(導入した集合族が近傍系であることを示し、その位相がゾルゲンフライ直線の位相と一致することを確かめよ．)
2. $\mathbb{R}$ 上の上限位相と下限位相は普通の $\mathbb{R}$ 上の距離位相より大きいことを示せ．
3. ゾルゲンフライ直線は離散直線よりは粗いことを示せ．
4. 上限位相と下限位相は同相であることを示せ．
5. 上限位相もしくは下限位相より大きい位相は離散位相だけであることを示せ．

$\boxed{\text{問題 6-8}}$ [位相の共通集合と和集合]
各 $\mathfrak{T}_a$ $(a \in \Omega)$ を集合 X の位相とするとき、$\cap_a \mathfrak{T}_a$ も X の位相となることを証明せよ．$\cup_a \mathfrak{T}_a$ についてはどうか？

$\boxed{\text{問題 6-9}}$ [可算集合と区間からなる辞書式順序]
$A \subset \mathbb{R}$ を無限部分集合とする．

1. A が集積点を持たない可算集合のとき、区間 $I = (0, 1]$ に通常の実数の順序を使って、$A \times I$ に辞書式順序を入れる．このようにしてできる順序集合から作られる順序位相は $\mathbb{R}$ の距離位相と同相であることを示せ．
2. A が非可算集合の場合どうか？

$\boxed{\text{問題 6-10}}$ [有限補集合位相]
無限集合上の有限補集合位相を考える．

1. 任意の無限部分集合の閉包は全体と一致することを示せ．
2. 可算無限集合上の有限補集合位相は、第一可算であることを示せ．
3. 非可算無限集合上の有限補集合位相は、第一可算ではないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 6-11}}$ [無限集合の有限補集合位相]
無限集合 X に有限補集合位相を与えた位相空間は距離空間でないことを示せ．つまり距離化できないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 6-12}}$ [位相空間]
$\{1, 2, 3\}$ 上の位相に対して、距離化できるものを全て求めよ．

$\boxed{\text{問題 6-13}}$ [無限集合の有限補集合位相]

無限集合 X に有限補集合位相を与えた位相空間は距離空間でないことを示せ．つまり距離化できないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 6-14}}$ [位相的性質]
以下の性質は位相的性質であることを示せ．
(1) 連結性
(2) コンパクト．
(3) 第 1 可算公理．
(4) 第 2 可算公理．

$\boxed{\text{問題 6-15}}$ [ユークリッド距離空間と有理数]
$\mathbb{R}$ 上のユークリッド距離位相 $\mathcal{O}_d$ に、有理数を付け加えた位相 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d \cup \mathbb{Q}$ を考える．このとき $\mathcal{O}$ は距離空間になることを示せ．

---

§7 連続写像

$\boxed{\text{問題 7-1}}$ [上限位相の連続性]
実数全体の集合 $\mathbb{R}$ において、通常の距離位相を $\mathcal{O}$ で表し、上限位相を $\mathcal{O}_u$ で表す．写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

によって定義する．このとき、f が連続であるのは f の定義域の位相と値域の位相として、$\mathcal{O}$ もしくは $\mathcal{O}_u$ のどちらを選べばよいか？連続となる全ての場合を見つけよ．

$\boxed{\text{問題 7-2}}$ [連続写像]
$(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とする．写像 $(X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$ がある．次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は $(X, \mathfrak{T}_X)$ から $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ への連続写像である．

(2) Y の任意の開集合 H に対して $f^{-1}(H)$ が X の開集合である．

(3) Y の任意の閉集合 K に対して $f^{-1}(K)$ が X の閉集合である．

$\boxed{\text{問題 7-3}}$ [連続写像]
$(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とする．写像 $(X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$ がある．次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は $(X, \mathfrak{T}_X)$ から $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ への連続写像である．

(2) $A \subset X$ に対し、$f(\mathrm{Cl}A) \subset \mathrm{Cl}f(A)$ ここで、Cl はそれぞれの位相空間における閉包である．

(3) Y の一つの開基 β に関する各開集合 W に対し、$f^{-1}(W)$ は X の開集合である．

$\boxed{\text{問題 7-4}}$ [連続写像]
つぎの条件は同値であることを示せ．

(1) $X \to Y$ は連続である．

(2) 任意の $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(B))$.

(3) 任意の $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(\mathrm{Cl}(B)) \supset \mathrm{Cl}(f^{-1}(B))$.

$\boxed{\text{問題 7-5}}$ [連続写像]
つぎの条件は同値であることを示せ.

(1) $X \to Y$ は連続である.

(2) 任意の $B \subset Y$ に対して $\mathrm{Bd}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathrm{Bd}(B))$.

$\boxed{\text{問題 7-6}}$ [関数空間上の連続関数]
距離空間 $(C(I), d)$（$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)||x \in I\}$）において、$f \in C(I)$ に対して、

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

とおけば、$\varphi : C(I) \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 7-7}}$ [位相の大きさ]
ある位相空間上の連続関数 $f : X \to Y$ がある．X, Y の位相をそれぞれ大きくするか、小さくするかどちらの場合において f の連続性が保たれるか？

$\boxed{\text{問題 7-8}}$ [点列連続]
$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ を距離空間とし、$f : X_1 \to X_2$ を写像とする．次の条件は同値であることを示せ.

(1) f は連続

(2) X_1 の点列 $\{x_n\}$ が X_1 の点 x に収束すれば、X_2 の点列 $\{f(x_n)\}$ は X_2 の点 $f(x)$ に収束する.

$\boxed{\text{問題 7-9}}$ [像への写像の連続性]
$f : X \to Y$ が連続ならば、$g : X \to f(X)$ を $X \ni x$ に対し $g(x) = f(x)$ により定めるとき、g は連続である．また、$f = j \circ g$ であり、ただし、$j : f(X) \to Y$ は包含写像である.

$\boxed{\text{問題 7-10}}$ [稠密部分集合上で一致する関数]
f, g を位相空間 X 上の連続関数、D を X において稠密な集合とする．D の各点において $f(x) = g(x)$ が成り立つならば、X のすべての点に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{\text{問題 7-11}}$ [連続写像の合成]
$f : X_1 \to X_2, g : X_2 \to X_3$ を位相空間の間の連続写像とする．このとき、この写像の合成 $g \circ f$ も連続写像であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 7-12}}$ [連続関数]
X を位相空間とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件は任意の $c \in \mathbb{R}$ において $\{x \in X | f(x) < c\}$ と $\{x \in X | f(x) > c\}$ がどちらも開集合であることであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 7-13}}$ [連続写像]
(X, d) を距離空間とし，$\mathcal{O}_d$ を d によって定まる距離位相とする．X の点 a について，距離空間 (X, d) における点 a の近傍系と，位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ における点 a の近傍系とは一致することを確かめよ.

$\boxed{\text{問題 7-14}}$ [連続写像]
(X_1, d_1) および (X_2, d_2) を距離空間とし、$\mathcal{O}_j$ を d_j によって定まる距離位相とする．写像 $f : X_1 \to X_2$ について、f が距離空間 (X_1, d_1) から (X_2, d_2) への連続写像であることと、f が位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から $(X_2, \mathcal{O}_2)$ への連続写像であることは、同等（同値）であることを確かめよ.

$\boxed{\text{問題 7-15}}$ [離散空間上の連続関数]

離散空間 $(X, \mathcal{O})$ 上の任意の関数 $X \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．また、逆に任意の関数 $X \to \mathbb{R}$ が連続なら、$(X, \mathcal{O})$ は離散空間であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 7-16}}$ [集積点]
$x \in X$ が A の集積点 $\Rightarrow x \in X$ が A の触点であるが、逆が成り立たない例をあげよ．また、距離空間上の開集合 A に対しては逆が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{問題 7-17}}$ [連続にする像上の最大の位相]
位相空間 $(X, \mathcal{T})$ から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき、次のように定義された $\mathcal{T}_f$ は Y 上の位相となる．このとき、$\mathcal{T}_f$ は f を連続にする Y の位相のうちで最も細かいものである．

$$\mathcal{T}_f := \{V \subset Y | f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$$

$\boxed{\text{問題 7-18}}$ [連続写像]
位相空間の写像 $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ において以下が同値であることを示せ．

(1) $\forall U' \in \mathcal{O}'$ に対して、$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ であること

(2) 任意の $x \in X$ と任意の $f(x)$ の近傍 $N' \in \mathrm{Nbd}_{X'}(f(x))$ に対して、ある x の近傍 $N \in \mathrm{Nbd}_X(x)$ が存在して、$f(N) \subset N'$ がなりたつ．

ここで、$\mathrm{Nbd}_Z(p)$ は位相空間 Z の点 p での近傍全体とする．

$\boxed{\text{問題 7-19}}$ [ゾルゲンフライ直線への連続写像]
距離空間 $\mathbb{R}$ からゾルゲンフライ直線への連続写像は定値写像であることを示せ．

---

§8 開基

$\boxed{\text{問題 8-1}}$ [開基]
次を示せ．

1. $\mathbb{R}$ 上の通常の距離位相において、任意の開区間 (a, b) がその開基になる．

2. 位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ の幾つかの開集合からなる集合族 β が $(X, \mathfrak{T})$ の開基となるためには、任意の開集合 G と任意の点 $x \in G$ に対し、$x \in W \subset G$ を満たす $W \in \beta$ が存在することが必要十分条件である．

3. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において、有理点（座標が全て有理数となる点）の $1/m$ 近傍の全体

$$\beta = \{U((r_1, \cdots, r_n); 1/m) | r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \cdots, n, m \in \mathbb{N}\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の開基である．

4. β を集合 X の部分集合の族とする．β がある位相空間の開基となるための必要十分条件は、

   (a) X は β に属する集合の和となる．

   (b) β に属する任意の 2 つの集合の共通部分は、β に属する集合の和となる．

   を満たすことである．

$\boxed{\text{問題 8-2}}$ [準開基]
次を示せ．

1. 実数直線 $\mathbb{R}$ において、部分集合の族

$$\mathcal{L} = \{(a,\infty), (-\infty, b) | a, b \in \mathbb{Q}\}$$

は $\mathbb{R}$ を生成する．

2. ゾルゲンフライ直線 $\mathbb{S}$ において、部分集合の族

$$\mathcal{L} = \{[a,\infty), (-\infty, b) | a, b \in \mathbb{Q}\}$$

は $\mathbb{S}$ を生成する．

$\boxed{\text{問題 8-3}}$ [生成される位相]
$X = \{1,2,3,4\},\ \mathcal{T} = \{\{1,2\},\{2,3\},4\}$ とする．$\mathcal{T}$ によって生成される集合 X の位相を求めよ．

$\boxed{\text{問題 8-4}}$ [生成される位相]
$X = \mathbb{Z},\ \mathcal{L} = \{\{[3n-1,\infty)\cap X | n \in \mathbb{Z}\}, \{(-\infty, 2n] \cap X | n \in \mathbb{Z}\}\}$ とする．$\mathcal{L}$ によって生成される X 上の位相は離散位相か？

$\boxed{\text{問題 8-5}}$ [離散空間上の連続関数]
離散空間 $(X,\mathcal{O})$ 上の任意の関数 $X \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．また、逆に任意の関数 $X \to \mathbb{R}$ が連続なら、$(X,\mathcal{O})$ は離散空間であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 8-6}}$ [閉集合の和集合の連続性]
$f : X \to X'$ を位相空間 $(X,\mathcal{O})$ と $(X',\mathcal{O}')$ の間の写像とし、A, B を位相空間 $(X,\mathcal{O})$ 上の閉集合とし、$X = A \cup B$ とする．$f_A : A \to X'$ と $f_B : B \to X'$ を制限写像とする．このとき、以下を示せ．

$$f : (X,\mathcal{O}) \to (X',\mathcal{O}') \text{ が連続} \Leftrightarrow f_A : (A,\mathcal{O}_A) \to (X',\mathcal{O}') \text{ と } f_B : (B,\mathcal{O}_B) \to (X',\mathcal{O}') \text{ が両方連続}$$

$\boxed{\text{問題 8-7}}$ [離散空間上の連続関数]
実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の通常の距離位相を $\mathcal{O}$ とし、開半区間の全体を $\mathcal{T}$ とする．すなわち

$$\mathcal{T} = \{(a,+\infty), (-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{T}$ は $\mathcal{O}$ の準開基であるが、$\mathcal{O}$ の開基でないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 8-8}}$ [位相空間の生成]
$\mathbb{R}$ 上の通常の位相として、有限個の開集合によっては生成されないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 8-9}}$ [$\mathbb{R}$ 上の開基]
$\mathbb{R}$ 上に存在する位相において、$\{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\} \cup \mathbb{Q}$ を開基とする位相は離散位相か？

$\boxed{\text{問題 8-10}}$ [$\mathbb{R}$ 上の開基]
$A_i\ (i = 1, ..., n)$ は位相空間 X の閉集合で、$X = \cup_i (A_i)$ とする．

$$G \text{ は } X \text{ の開集合} \Leftrightarrow G \cap A_i \text{ が部分空間 } A_i \text{ の開集合 } (1 \leq i \leq n)$$

を証明せよ．

$\boxed{\text{問題 8-11}}$ [位相空間の生成]

X を位相空間、$A \subset X$ とするとき、$\mathrm{Cl}(A) - A$ が閉集合となるためには、$A = G \cap F$ となる開集合 G と閉集合 F が存在することが必要十分であることを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 8-12}}$ [p-**進距離**]
問題 2-14 の距離によって定義された位相は $\mathbb{Z}$ 上の通常の距離位相と同値でないことを示せ．またこの位相は $U_\alpha(n) = \{n + \lambda p^\alpha | \lambda \in \mathbb{Z}\}$ を開基としてできる $\mathbb{Z}$ 上の位相空間と同じであることを示せ.

---

§9 収束

$\boxed{\text{問題 9-1}}$ [距離空間上の閉集合]
距離空間 X の部分集合 F が閉集合であるための必要十分条件は F が点列の極限に関して閉じていることであることを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 9-2}}$ [離散位相の収束列]
離散空間 X において、点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ に収束するためには、次の条件が必要十分であることを示せ.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x$$

$\boxed{\text{問題 9-3}}$ [収束する部分列]
$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ に $\mathbb{R}^2$ 上の通常の距離位相の相対位相から決まる位相を入れる．S^1 上の任意の点列 $\{x_n\}$ は収束する部分列を持つことを示せ.

$\boxed{\text{問題 9-4}}$ [収束点列]
$f : X \to Y$ が連続ならば、X の任意の収束点列 $\{x_n\}$ に対し、$\{f(x_n)\}$ は Y の収束点列となることを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 9-5}}$ [基本列]
距離空間 (X, d) の点列 $(x_n | n \in \mathbb{N})$ について、任意の正数 ϵ に対してある自然数 $\mathbb{N}$ を選んで、$m \geq N$ かつ $n \geq N$ ならば、$d(x_m, x_n) < \epsilon$ となるようにできることと、点列 $(x_n | n \in \mathbb{N})$ が基本列であることは同等であることを確かめよ.

---

§10 可算公理

$\boxed{\text{問題 10-1}}$ [可算公理、可分]

1. 第 2 可算公理を満足する位相空間は、第 1 可算公理を満足し、可分な位相空間であることを示せ.
2. $\mathbb{R}^n$ 上に通常の距離位相を入れた空間は可分な位相空間であることを示せ.
3. ヒルベルト空間 ℓ_1, ℓ_2 は可分であることを示せ.
4. ゾルゲンフライ直線 $\mathbb{S}$ は第 1 可算かつ可分であるが第 2 可算ではないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 10-2}}$ [下限位相の積空間]
$\mathbb{R}^2$ において

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \times [c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}; a < b, c < d\}$$

を開基とする位相空間をを $\mathbb{S}^2$ とする．次のことを示せ.

(1) 位相空間 $\mathbb{S}^2$ は第 1 可算公理を満足し、可分である.

(2) $\mathbb{S}^2$ の部分集合 $A = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1\}$ の上の相対位相は離散位相である.

(3) $\mathbb{S}^2$ は第 2 可算公理を満足しない.

$\boxed{\text{問題 10-3}}$ [非可算直積の可分性]
Λ が非可算集合とするとき、X_λ は密着位相ではなく、$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が可分となることがあることを示せ.

$\boxed{\text{問題 10-4}}$ [**問 17.6,17.5**]
距離空間では可分であることと第 2 可算であることは同値であることをしめせ.

$\boxed{\text{問題 10-5}}$ [普遍空間]
第 2 可算公理を満たす任意の距離空間 (X, d) は $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ の部分距離空間となることを示せ.

---

§11 相対位相

$\boxed{\text{問題 11-1}}$ [部分位相]
部分位相 (相対位相) の定義が位相の定義を満たしていることを示せ.

$\boxed{\text{問題 11-2}}$ [$\mathbb{R}^2$ の部分位相としての $\mathbb{R}$]
$\mathbb{R}^2$ に通常の距離位相を入れる．このとき、部分集合 $\mathbb{R}$ を考える.

1. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、開区間 (a, b) は $(a, b) = B \cap \mathbb{R}$ となるような $\mathbb{R}^2$ 上の開集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ が存在することを示せ.
2. β を $\mathbb{R}^2$ 上の位相のある開基とする．このとき、$\beta \cap \mathbb{R} = \{B \cap \mathbb{R} | B \in \beta\}$ が $\mathbb{R}$ の通常の距離位相の開基になっていることを示せ.
3. $\mathbb{R}^2$ における $\mathbb{R}$ の相対位相は通常の $\mathbb{R}$ の距離位相であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 11-3}}$ [実数と同相な空間]
$S^1_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$ と実数全体は同相であることを示せ．ただし、S^1_+ には $\mathbb{R}^2$ 上の通常の距離位相からくる相対位相が入っているとする.

$\boxed{\text{問題 11-4}}$ [相対位相]
$A = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} | |x| > 1\}$ とし、$A \ni x$ に対し、

$$A \cap \{(a, b) \quad (a < x < b; a, b \in A)$$

を x の近傍として定まる A の位相は、実数空間 $\mathbb{R}$ の部分空間としての A の相対位相と異なることを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 11-5}}$ [部分空間の開基]
β を位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ の開基とする．$\beta \cap Y = \{B \cap Y | B \in \beta\}$ は部分空間 $(Y, \mathfrak{T} \cap Y)$ の開基となることを示せ.

$\boxed{\text{問題 11-6}}$ [部分空間の閉包]
位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ に対して、部分集合 $Y \subset X$ をとる．$A \subset Y$ に対して、$\mathrm{Cl}_Y(A) = Y \cap \mathrm{Cl}_X(A)$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{\text{問題 11-7}}$ [閉包と境界点]

位相空間 $(X,\mathfrak{T})$ に対して、部分集合 $Y \subset X$ をとる．$A \subset Y$ に対して、$\mathrm{Int}_Y(A) = Y \cap \mathrm{Int}_X(A)$ や $\mathrm{Bd}_Y(A) = Y \cap \mathrm{Bd}_X(A)$ はかならずしも成り立たない．成り立たない例を挙げよ．

問題 11-8 [共通集合の閉包]
X を位相空間とする．$A \subset X$ とし、G は X の開集合であるとする．

1. $\mathrm{Cl}(A \cap G) \supset \mathrm{Cl}(A) \cap G$ が成り立つことを示せ．特に、$A \cap G = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}(A) \cap G = \emptyset$ を示せ．
2. すぐ上の問題は、G が開集合でないと成り立たない．そのような例を挙げよ．

問題 11-9 [相対位相]
位相空間 $(X,\mathfrak{T})$ が近傍系 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x) | x \in X\}$ によって定められている場合、$y \in Y$ に対して、

$$\mathcal{U}(y) \cap Y = \{U \cap Y | U \in \mathcal{U}(y)\}$$

とおけば、$\mathcal{V} = \{\mathcal{U}(y) \cap Y | y \in Y\}$ は Y の近傍系となり、この近傍の定める Y の位相は $\mathfrak{T}$ によって定められる Y 上の相対位相と一致することを示せ．

問題 11-10 [制限写像]
$f : X \to Y$ が連続で、$A \subset X$ ならば、f を A に制限した写像 $f_A : A \to Y$ も連続であることを示せ．

問題 11-11 [相対位相]
$\mathbb{R}$ の部分集合に $\mathbb{R}$ の相対位相からくる位相を入れておく．以下の問題に答えよ．

(1) (a,b) と (c,d) は同相であることを示せ．また $[a,b]$ と $[c,d]$ は同相であることを示せ．

(2) (a,b) と $\mathbb{R}$ は同相であることを示せ．

問題 11-12 [S^1 上の相対位相]
S^1 を $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ として、$\mathbb{R}^2$ の相対位相を入れておく．また、$f : \mathbb{R} \to S^1$ を $f(\theta) = (\cos \pi\theta, \sin \pi\theta)$ とおき、$\mathbb{R}$ の通常の距離位相から誘導される位相を S^1 に入れる．このとき、S^1 上の 2 つの位相は同値であることを示せ．

---

§12 開写像・閉写像

問題 12-1 [射影の開写像]
射影 $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ は連続な開写像である．

問題 12-2 [閉写像にならない例]
積空間から、因子空間への写像が閉写像にならない例を与えよ．

問題 12-3 [開写像になることと閉写像になること]
全単射 $f : X \to Y$ に対しては、開写像となること、閉写像となることと、および逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が連続となることは互いに同値であることを示せ．

問題 12-4 [開写像と閉写像]
連続関数 $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ として閉写像であるが、開写像でないものを構成せよ．

問題 12-5 [開写像]
連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が開写像であるとき、$f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ は同相写像であることを示せ．

問題 12-6 [複素数を用いた写像]
複素平面 $\mathbb{C}$ に絶対値を用いて距離空間とする．つまり、$z, z' \in \mathbb{C}$ のとき、$d(z,z') = |z - z'|$ とする．このとき、$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = z^2$ として定義するとき、f は連続写像か？また、開写像となるか？

$\boxed{\text{問題 12-7}}$ [連続ではない、開写像（閉写像）]
連続ではない開写像の例、および、連続ではない閉写像の例を作れ.

$\boxed{\text{問題 12-8}}$ [開写像]
$f : X \to Y$ が開写像であるためには、任意の $B \subset Y$ に対し、$f^{-1}(\mathrm{Cl}(B)) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(B))$ となることが必要十分であることを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 12-9}}$ [閉写像]
$f : X \to Y$ が閉写像であるためには、X の任意の開集合 U に対し、$\{y \in Y | f^{-1}(y) \subset U\}$ が Y の開集合となることが必要十分であることを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 12-10}}$ [開写像]
$f : X \to Y$ は全射、$\varphi : X \to I = [0, 1]$ は連続写像とする．写像 $\psi : Y \to I$ を $\psi(y) = \inf\{\varphi(x) | x \in f^{-1}(y)\}$ で定めると、

$$f \text{ が開写像ならば、} \psi^{-1}([0, r)) \text{ は } Y \text{ の開集合.}$$

を示せ.

$\boxed{\text{問題 12-11}}$ [閉写像]
$f : X \to Y$ は全射、$\varphi : X \to I = [0, 1]$ は連続写像とする．写像 $\psi : Y \to I$ を $\psi(y) = \inf\{\varphi(x) | x \in f^{-1}(y)\}$ で定めると、

$$f \text{ が閉写像ならば、} \psi^{-1}((r, 1]) \text{ は } Y \text{ の開集合.}$$

を示せ.

$\boxed{\text{問題 12-12}}$ [開写像かつ閉写像]
$f : X \to Y$ は全射、$\varphi : X \to I = [0, 1]$ は連続写像とする．写像 $\psi : Y \to I$ を $\psi(y) = \inf\{\varphi(x) | x \in f^{-1}(y)\}$ で定めると、

$$f \text{ が開写像かつ閉写像ならば、} \psi \text{ は連続.}$$

を示せ.

$\boxed{\text{問題 12-13}}$ [開写像かつ閉写像]
$a \in I$ に対し、$f_a \in C(I)$ を $f_a(t) = a$ $(t \in I)$ と定めたとき、$\varphi : I \to (C(I), d); \varphi : a \mapsto f_a$ は埋蔵となることを示せ.

$\boxed{\text{問題 12-14}}$ [開写像]
開写像ではない連続写像をあげよ.

$\boxed{\text{問題 12-15}}$ [開写像]
開写像だが、連続でない例をあげよ.

---

§13 商写像・商空間

$\boxed{\text{問題 13-1}}$ [商写像]
商写像は連続であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 13-2}}$ [**トーラス**]
通常のユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 上に同値関係、$(x_1, y_1) \sim_1 (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$ をとる．また、$[0, 1]^2$ 上に同一視、$(1, y) \sim_2 (0, y)$、$(x, 0) \sim_2 (x, 1)$ を入れる．このとき、$\mathbb{R}^2 / \sim_1$ と $I^2 / \sim_2$ は同相であることを示せ．この空間のことをトーラスという.

$\boxed{\text{問題 13-3}}$ [**トーラス** $= S^1 \times S^1$]
トーラス（$I \times I$ もしくは $\mathbb{R}^2$ の等化空間）は積空間 $S^1 \times S^1$ と同相であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 13-4}}$ [**トーラスの 1 次変換**]
$T^2 := \mathbb{R}^2/\sim_1 = S^1 \times S^1$ と置く. $A \in SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ に対して、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T^2$ に対して、変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はトーラス上の同相写像を与えることを示せ.

$\boxed{\text{問題 13-5}}$ [アニュアラスの同一視空間]
アニュラス $\mathbf{A}^2$ を $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, 外側の境界 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{A}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ を 1 点につぶして出来る商空間 $\mathbf{A}^2/S^1$ は, 単位円板 B^2 と同相であることを示せ. このとき, つぶす境界を内側にしても同じであることをしめせ.

$\boxed{\text{問題 13-6}}$ [単位円版上の同一視空間]
単位円板 B^2 において, 境界の単位円周 $S^1 = \partial B^2$ を 1 点につぶして出来る商空間 B^2/S^1 は, 球面 S^2 と同相であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 13-7}}$ [商写像]
商写像は連続であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 13-8}}$ [商写像]
X, Y, Z を位相空間とし、$f : X \to Z, g : X \to Y, h : Y \to Z$ とし、$f = h \circ g$ として以下を示せ.

(1) g が商写像、f が連続とするなら、h は連続である.

(2) g, h が商写像であるなら、f は商写像である.

(3) f が商写像、g, h が連続であるなら、h は商写像である.

$\boxed{\text{問題 13-9}}$ [クラインの壷]
クラインの壷を定義せよ. また、空間の向きを数学的に定義することで、その空間がどうして向きがつけられないか説明せよ. 空間の向きについては、位相曲面における向きの定義で構わない.

$\boxed{\text{問題 13-10}}$ [商写像となるためのある十分条件]
連続な全射 f が、開写像もしくは閉写像であるなら f は商写像であることを示せ.

---

§14 埋蔵写像・同相写像

$\boxed{\text{問題 14-1}}$ [埋蔵写像となるための条件]
写像 $f : (X, \rho) \to (Y, \rho')$ が、$\rho'(f(x), f(x')) = \rho(x, x')$（$x, x' \in X$）を満たすならば、$f$ は埋蔵写像となることを示せ.

$\boxed{\text{問題 14-2}}$ [埋蔵写像]
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする. このとき、この f のグラフ $\Gamma := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$ は $F : \mathbb{R} \to \Gamma$ からの埋蔵写像が構成できることを示せ.

$\boxed{\text{問題 14-3}}$ [同相写像]
$f : X \to Y$ を全単射連続写像とする. このとき、f が同相写像であることは、f が開写像であることと同値である.

$\boxed{\text{問題 14-4}}$ [全単射連続だが同相でない例]

全単射連続だが、同相写像でないものをあげよ.

$\boxed{\text{問題 14-5}}$ [立体射影]
3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において、$S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ とする．写像 $f:\mathbb{R}^3-\{x_3=1\}\to\mathbb{R}^2$ を $f(x_1,x_2,x_3)=\left(\dfrac{x_1}{1-x_3},\dfrac{x_2}{1-x_3}\right)$ とする．この写像によって、$\mathbb{R}^3$ のどの部分が平面と同相になったか？説明せよ.

$\boxed{\text{問題 14-6}}$ [相対位相]
位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 $A\subset X$ の相対位相は、埋め込み写像 $i:A\to X$ が連続となる位相のうちで最小の位相であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 14-7}}$ [$\mathbb{R}$ 上の区間とゾルゲンフライ直線上の区間]
$[0,1],[0,1),(0,1)$ に $\mathbb{R}$ 上の部分集合とする.

1. $\mathbb{R}$ 上の距離空間の相対位相から入る位相を入れる．このとき、これらの区間はお互い位相同型でないことを示せ.
2. $\mathbb{R}$ 上での半開区間位相（ゾルゲンフライ直線の位相）の相対位相とした場合はお互い、位相同型か？

$\boxed{\text{問題 14-8}}$ [無理数全体]
実数 $\mathbb{R}$ の無理数全体の空間 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に同相であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 14-9}}$ [ひらがなにはいる位相]
$\mathbb{R}^2$ にすべてのひらがなを書くとする．それらを $\mathbb{R}^2$ 上の部分集合として $H_i(i=1,\cdots,48)$ とおく．$\{H_i|1\le i\le 48\}$ に距離位相からくる相対位相を入れるとき、この同相類はいくつあるか？
ひらがなをどう書くかは始めに与えてよいとする.

---

§15 積空間

$\boxed{\text{問題 15-1}}$ [積位相]
$X\times Y$ に対して B が $(x,y)\in X\times Y$ の近傍であるとは、ある $x\in X$ の開集合 U と $y\in Y$ の開集合 V が存在して、$U\times V\subset B\subset X\times Y$ となることを示せ.

$\boxed{\text{問題 15-2}}$ [積位相]
積空間 $X\times Y$ において、$A\subset X,B\subset Y$ とする．このとき以下を示せ.

(1) $\mathrm{Int}(A\times B)=\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)$

(2) $\mathrm{Bd}(A\times B)=[\mathrm{Bd}(A)\times\mathrm{Cl}(B)]\cup[\mathrm{Cl}(A)\times\mathrm{Bd}(B)]$

$\boxed{\text{問題 15-3}}$ [積位相]
積空間 $X\times Y$ 上の点列 (x_n,y_n) が連続となるためには、x_n,y_n が X,Y においてそれぞれ収束することであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 15-4}}$ [積位相]
積空間 $X\times Y$ の積位相は各射影 $X\times Y\to X$ と $X\times Y\to Y$ が連続となる最弱の位相であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 15-5}}$ [箱型積位相]
$(X_\lambda,\mathcal{O}_\lambda)$ を位相空間とする．積集合 $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 上に、$\left\{\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}p_\lambda^{-1}(H_\lambda)|H_\lambda\in\mathcal{O}_\lambda\right\}$ を位相として定めることが

できる．これを箱型積位相という．一般に、箱型積位相と通常の積位相とは異なる位相であることを示せ．ここで、p_λ を積集合から X_λ への自然な射影とする．

$\boxed{\text{問題 15-6}}$ [射影]
積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ は連続な開写像であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 15-7}}$ [積空間への写像]
$p_\lambda : X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を積集合からの自然な射影とする．Z を位相空間とし、$f : Z \to X$ を写像とするとき、f が連続であるための必要十分条件は、任意の λ に対して $p_\lambda \circ f$ が連続であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 15-8}}$ [距離空間の可算無限直積上の距離関数]
可算個の距離空間 (X_i, ρ_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ に対して、$\delta(X_i) \leq 1$ とする．このとき、積空間 $\prod_{i\geq 1} X_i$ と 2 点 $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots)$ に対して、

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}[\rho_i(x_i, y_i)]}$$

とおくと、ρ は積空間 $\prod_{i\geq 1} X_i$ 上の距離関数となり、$\prod_{i\geq 1} X_i$ 上の積位相と一致する．

$\boxed{\text{問題 15-9}}$ [無理数とその連分数展開]
$(0, 1)$ 上の無理数全体からなる部分空間を $\mathbb{P}'$ とかく．$\mathbb{P}'$ は、連分数展開

$$\mathbb{P}' \ni \alpha = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}} \quad (n_i \in \mathbb{N})$$

を使って、$(n_1, n_2, \cdots)$ を対応させる．この写像は、$\mathbb{P}'$ と自然数の可算直積空間 $\mathbb{N}^{\aleph_0}$ と同相を与えることを示せ．

$\boxed{\text{問題 15-10}}$ [積位相]
$\mathbb{R}^n$ の 2 元 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して、$\mathbb{R}^n$ の元 $x + y$ を

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

により定義する．$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x, y) = x + y$ として定義する．このとき、f は積空間 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ から位相空間 $\mathbb{R}^n$ への連続写像であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 15-11}}$ [積空間]
積空間 $(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, ※_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda)$ の積位相 $※_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ は射影 $\mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ が連続写像となる $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の位相の中で最小の位相であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 15-12}}$ [**問 19.3**]
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\Delta : X \to X \times X$ を対角線写像、すなわち $\Delta(x) = (x, x)$ $(x \in X)$ とする．Δ は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ から積空間 $(X, \mathcal{O}) \times (X, \mathcal{O})$ への連続写像であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 15-13}}$ [積空間の近傍]
$W \subset X \times Y$ が $(x, y) \in X \times Y$ の近傍となるためには、次の条件を満たすことが必要十分である．

$$\exists U \in \mathrm{Nbd}_X(x), \exists V \in \mathrm{Nbd}_Y(y) \text{ s.t } U \times V \subset W$$

$\boxed{\text{問題 15-14}}$ [積空間上の収束点列]
$X \times Y$ における点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $(x, y) \in X \times Y$ に収束するためには $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ および、$(y_n \to y)$ $(n \to \infty)$ となることが必要十分である.

$\boxed{\text{問題 15-15}}$ [積空間への連続写像]
位相空間 Z からの写像 $f : Z \to X \times Y$ が（$z \in Z$ において）連続になるためには、$\mathrm{pr}_X \circ f$ と $\mathrm{pr}_Y \circ f$ が共に（$z \in Z$ において）連続となることが必要十分であることである．すなわち、

$$f : \text{連続 (at } z \in Z) \Leftrightarrow \mathrm{pr}_X \circ f, \mathrm{pr}_Y \circ f \text{ が共に連続 (at } z \in Z)$$

$\boxed{\text{問題 15-16}}$ [射影因子と部分空間の同一視]
任意の点 $x \in X$, $y \in Y$ に対して、$X \times Y$ の部分空間 $\{x\} \times Y,\ X \times \{y\}$ はそれぞれ Y および、X の同相である．すなわち、$\{x\} \times Y \approx Y, X \times \{y\} \approx X$.

$\boxed{\text{問題 15-17}}$ [積空間の距離化可能性]
可算個の距離空間系 $((X_n, d_n)|n \in \mathbb{N})$ が与えられ、$\mathcal{O}_n$ を d_n から定まる X_n の距離位相とする $(n \in \mathbb{N})$. このとき、位相空間系 $((X_n, \mathcal{O}_n)|n \in \mathbb{N})$ の積空間は距離化可能であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 15-18}}$ [可算積空間]
(X_i, ρ_i) を可算個の距離空間とする．直径 $\mathrm{diam}(X_i)$ は全て 1 以下とする．このとき、$X = \prod_i X_i$ の任意の 2 点 $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots ,)$ に対して、

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} (\rho_i(x_i, y_i))^2}$$

と定めると、ρ は X 上の距離関数となり、その位相は X の積位相と一致することを示せ.

$\boxed{\text{問題 15-19}}$ [無限積空間の内部]
無限個の積空間 $\prod_m X_m$ において、任意の部分集合 $A_m \subset X_m$ に対して、積の内部 $(\prod_m A_m)^i$ は内部の積 $\prod_m (A_m)^i$ となるか？

---

§16 連結性

$\boxed{\text{問題 16-1}}$ [連結]
X, Y を位相空間とし、連続 $f : X \to Y$ に対して、X の連結な部分集合 A の像 $f(A)$ も連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-2}}$ [連結部分集合の閉包の連結性]
連結な部分集合の閉包は連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-3}}$ [直積空間の連結性]
連結な位相空間の直積は連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-4}}$ [$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ の連結性]
実数全体 $\mathbb{R}$ は連結であることを示せ．また、有理数全体 $\mathbb{Q}$ は不連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-5}}$ [連結]
位相空間 X 上の任意の 2 点がある連結部分集合に含まれるとき、X は連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-6}}$ [連結]
位相空間の各連結成分は閉集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-7}}$ [完全不連結集合]
有理数全体は完全不連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-8}}$ [局所連結]
局所連結だが、連結でない空間をあげよ.

$\boxed{\text{問題 16-9}}$ [局所連結]
局所連結であることと、すべて連結な開集合を開基とすることができることは同値であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-10}}$ [トポロジストのサイン曲線]
$\{(x, \sin(1/x))|0 < x \leq 1\}$ の閉包を X とする.

1. X は連結であるが、弧状連結でないことを示せ.

2. X は $\{(x, \sin(1/x))|0 < x \leq 1\}$ の閉包は連結であるが、局所連結でないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-11}}$ [連結性]
位相空間 X が連結であるためには、連続な全射 $X \to \{0, 1\}$ が存在しないことが必要十分であることを示せ. ただし、$\{0, 1\}$ には離散とする.

$\boxed{\text{問題 16-12}}$ [弧状連結であるが局所連結でない]

$$Y = \{(x, y)|x = 0, 1, 1/2, 1/3, \cdots, ; 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0)|0 \leq x \leq 1\}$$

は弧状連結であるが、局所弧状連結ではないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-13}}$ [商空間の連結性]
$A \subset X$ を稠密な部分集合とする. このとき、商空間 X/A は連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-14}}$ [商空間の連結性]
X を連結な位相空間とする. A を X の連結集合とし、B を $X - A$ の開集合でかつ閉集合とする. $A \cup B$ は連結であることを証明せよ.

$\boxed{\text{問題 16-15}}$ [任意の 2 点がある連結部分集合に含まれる位相空間]
任意の 2 点がある連結部分集合に含まれるような位相空間は連結であることを示せ. すなわち次を示せ.

$$\forall x, y \in X \exists A \subset X \text{ 連結集合で } x, y \in A \Rightarrow X \text{ 連結}$$

$\boxed{\text{問題 16-16}}$ [連結集合の列]
隣り同士が互いに交わる連結部分集合の列の和集合は連結であることを示せ. つまり次を示せ.

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset X \text{ 連結 } A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{は連結}$$

$\boxed{\text{問題 16-17}}$ [連結集合の列]
任意の 2 つが互いに交わる連結部分集合の族の和集合は連結であることを示せ.

$$\forall \lambda \in \Lambda, A_\lambda \subset X \text{ 連結かつ} \lambda, \lambda' \in \Lambda, A_\lambda \cap A_{\lambda'} \neq \emptyset \Rightarrow \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{は連結}$$

$\boxed{\text{問題 16-18}}$ [$\mathbb{R}$ 上の連結集合]
$\mathbb{R}$ 上の部分集合 A が連結であるためには A が区間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-19}}$ [完全不連結]
相異なる $x, y \in X$ を含む連結集合 A は全て連結集合でないとすると、X は完全不連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-20}}$ [連結性]
連結集合の連続像は連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-21}}$ [連結性のある同値関係]
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 及び、部分集合 $A \subset X$ において、A が $(X, \mathcal{O})$ の連結集合であることと次が成り立つことが同値であることを示せ.

$$U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset,\ A \subset U \cup V$$

のとき、$U \cap V \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ.

$\boxed{\text{問題 16-22}}$ [稠密な連結部分集合]
稠密は連結部分集合を含む位相空間は連結であり、連結集合の閉包は連結であることを示せ．つまり次を示せ.

$$A \subset B \subset \mathrm{cl}(A) \subset X \text{ かつ } A \text{ 連結なら } B \text{ は連結}$$

$\boxed{\text{問題 16-23}}$ [連結成分]
位相空間 X における $x \in X$ を含む最大の連結集合を x を含む連結成分といい、$C_X(x)$ と表すことにする．$C_X(x)$ は閉集合であり、$x, y \in X$ に対して、$C_X(x) \neq C_X(y)$ ならば、$C_X(x) \cap C_X(y) = \emptyset$ であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-24}}$ [$\mathbb{R}$ が連結性また、$\mathbb{Q}$ が完全不連結性]
$\mathbb{R}$ が連結集合であることを示せ．また、$\mathbb{Q}$ が完全不連結空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-25}}$ [**例 25.4**]

$$X = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) |x > 0 \right\} \cup \{(0, y) ||y| \leq 1\}$$

とおき、$\mathbb{R}^2$ の距離位相から誘導される位相を入れる．このとき、X は連結だが、局所連結ではなく、弧状連結でもないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-26}}$ [区間の連結性]
$\mathbb{R}$ 上の通常の距離位相に対して（閉、開、半開）区間は連結であるこを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-27}}$ [球の連結性]
$\mathbb{R}^{n+1}$ 上の球 $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^n = 1\}$ は連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-28}}$ [弧状連結]
弧状連結なら連結であることを示せ．また、$\mathbb{R}^n$ の連結な開集合は弧状連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-29}}$ [開集合でない連結成分]
各連結成分が閉集合だが開集合でない例をあげ、証明せよ．．$\mathbb{Q}$、カントール集合、ゾルゲンフライ直線など用いてよい.

$\boxed{\text{問題 16-30}}$ [部分集合と連結空間]
A が連結空間ならば、A は埋め込まれた部分集合 $A \subset X$ として A は連結集合であることを示せ．つまり、部分空間として入れている空間に因らずに連結性がいえることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-31}}$ [閉包の内部と内部の閉包]
A を閉連結集合とするとき、A の内部の閉包 $\overline{(A^i)}$ は A と一致するか？また、A を開連結集合とするとき、A の閉包の内部 $(\bar{A})^i$ は A と一致するか？

$\boxed{\text{問題 16-32}}$ [$\mathbb{R}^n$ の開集合]
$\mathbb{R}^n$ の開集合 G に対して次を示せ.

(1) 部分空間 G において、点 $a \in G$ と弧によって結ぶことのできる G の点の全体を $G(a)$ とする．このとき $G(a)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ.

(2) G が連結であれば、G は弧状連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-33}}$ [2 点集合]
2 点集合 $\{a, b\}$ 上の位相 $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ は弧状連結であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-34}}$ [n 点集合]
n 点集合上の位相空間 X を考える．X が連結であることと弧状連結であることは同値であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-35}}$ [局所連結空間の連結成分]
局所連結空間の連結成分は開かつ閉であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-36}}$ [連結部分集合の性質]
任意の 2 点がある連結部分集合に含まれるような位相空間は連結であることを示せ．これを用いて $\mathbb{R}^2$ から高々可算個の点の補集合は連結集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-37}}$ [位相空間の連結性]
位相空間 X が連結であるためには連続な全射 $X \to \{0, 1\}$ が存在しないことが必要十分であることを示せ．ただし、$\{0, 1\}$ には離散位相が入っているとする.

$\boxed{\text{問題 16-38}}$ [連結性]
X, Y を連結は位相空間とし、$A \subset X, B \subset Y$ を真部分集合（全体と一致しない）とする．このとき、$X \times Y - A \times B$ も連結となることを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-39}}$ [ゾルゲンフライ直線の局所連結性]
ゾルゲンフライ直線は局所連結ではないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 16-40}}$ [弧状連結、連結]
$\mathbb{R}^2$ の部分集合として $X = \left\{(x, y) | \left(x, x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), x > 0\right\} \cup \{(0, 0)\}$ を考える．このとき、X は連結か？また弧状連結か？

---

§17 分離公理

$\boxed{\text{問題 17-1}}$ [非ハウスドルフ空間上の点列]
非ハウスドルフ空間における点列 $\{a_n\}$ で a にも b にも収束するものを構成せよ. ただし、$a \neq b$ とする.

$\boxed{\text{問題 17-2}}$ [ハウスドルフ空間]
ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-3}}$ [距離空間の分離公理]
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ はハウスドルフ（T_2-空間）を満たすことを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-4}}$ [離散空間の分離公理]
離散空間は分離公理 T_i（$i = 1, 2, 3, 4$）を満たすことを示せ。

$\boxed{\text{問題 17-5}}$ [ユークリッド空間の正規性]
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は正規空間 ($T_2 + T_4$-空間）を満たすことを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-6}}$ [n 点集合の分離公理]
n 点集合上のハウスドルフ空間 (T_2-空間) は離散位相であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-7}}$ [3 点集合の分離公理 2]
3 点集合の位相のうち、T_0-空間となるものはいくつあるか？

$\boxed{\text{問題 17-8}}$ [ハウスドルフ空間の一点集合]
ハウスドルフ空間の一点集合は常に閉集合であり、正規ハウスドルフ空間は正則空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-9}}$ [距離空間の分離性]
距離位相は常にハウスドルフ空間であり、正規空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-10}}$ [ゾルゲンフライ直線]
ゾルゲンフライ直線は正規であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-11}}$ [ハウスドルフ空間の直積、部分空間]
ハウスドルフ空間の直積、また部分空間はまたハウスドルフになることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-12}}$ [ハウスドルフ空間の商空間]
ハウスドルフ空間の商空間がハウスドルフにならない例を示せ.

$\boxed{\text{問題 17-13}}$ [ハウスドルフ空間の収束極限]
ハウスドルフ空間 X において収束する点列の極限は一意に決まることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-14}}$ [分離公理の遺伝性]
$T_i(i = 2, 3)$ とする．T_i は部分空間で保たれる（遺伝的である）ことを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-15}}$ [$T_{2\frac{1}{2}}$ の遺伝性]
$T_{2\frac{1}{2}}$ は部分空間で保たれる（遺伝的である）ことを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-16}}$ [積空間の分離公理]
$T_i(i = 2, 3)$ とする．T_i は積空間で保たれることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-17}}$ [$T_{2\frac{1}{2}}$ の積空間]
$T_{2\frac{1}{2}}$ は積空間で保たれることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-18}}$ [T_4 の弱遺伝性]
T_4 空間は閉部分集合にたいして保たれる（弱遺伝的である）ことを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-19}}$ [非ハウスドルフ空間上の点列]
非ハウスドルフ空間における点列 $\{a_n\}$ で a にも b にも収束するものを構成せよ．ただし、($a \neq b$) とする.

$\boxed{\text{問題 17-20}}$ [3 点集合の分離公理]
集合 $X = \{1, 2, 3\}$ の上の位相で、次の条件を満足するものを全て求めよ.

(1) 正規かつ正則であるが、T_1 位相でないもの.

(2) 正規であるが、正則でなくかつ T_1 位相でないもの.

$\boxed{\text{問題 17-21}}$ [正規空間の特徴づけ]
位相空間 $(X,\mathcal{O})$ について、次の二つの条件は同等であることを示せ.

(1) $(X,\mathcal{O})$ は正規空間

(2) $\mathcal{O}$-閉集合 F と $\mathcal{O}$-開集合 G について、$F\subset G$ ならば、$\mathcal{O}$-開集合 U で $F\subset U$ かつ $\bar{U}\subset G$ となるものが常に存在する.

$\boxed{\text{問題 17-22}}$ [正則空間の特徴づけ]
位相空間 $(X,\mathcal{O})$ について、次の二つの条件は同等であることを示せ.

(1) $(X,\mathcal{O})$ は正則空間

(2) 各点 $x\in X$ について、点 x の閉近傍の全体が基本近傍系となる.

$\boxed{\text{問題 17-23}}$ [有限正則空間]
有限正則空間は正規空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-24}}$ [有限補集合位相の分離公理]
$(\mathbb{N},\mathcal{O})$ を有限補集合位相とする．このとき、$\mathcal{O}$ はハウスドルフでない T_1 位相であることを示せ．また、数列 x_n $(n\in\mathbb{N})$ で、$x_n\geq n$ を満たす数列とする．このとき、x_n は $\mathcal{N}$ の全ての点に収束することを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-25}}$ [4 点集合 **http://motochans.blogspot.jp/2014/07/blog-post.html** を参照]
4 点集合 $\{a,b,c,d\}$ 上の T_0 空間の同相類を全て求めよ.

$\boxed{\text{問題 17-26}}$ [ハウスドルフ空間]
X をハウスドルフ空間とする．このとき、$\Delta=\{(x,y)\in X\times X|x\in X\}$ は $X\times X$ 上の閉集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-27}}$ [ハウスドルフ空間]
X をハウスドルフ空間とする．このとき、次が成り立つことを示せ．$f,g:X\to Y$ が連続写像であるとする.

(1) $\{x\in X|f(x)=g(x)\}$ は X の閉集合である.

(2) D を X において稠密な集合とするとき、$f|_D=g|_D$ ならば、$f=g$ である.

(3) f のグラフ $\{(x,f(x))\in X\times Y|x\in X\}$ は $X\times Y$ の閉集合である.

$\boxed{\text{問題 17-28}}$ [T_1 空間]
任意の相異なる 2 点 p,q において、一方を包み、他方を含まないような開集合が各点においてとれることをいう．T_1 空間は一点が閉集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 17-29}}$ [T_1 かつ T_4]
T_1 かつ T_4 ならばハウスドルフであることを示せ.

---

§18 コンパクト性

$\boxed{\text{問題 18-1}}$ [コンパクト性]
$\mathbb{R}$ はコンパクトでないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-2}}$ [コンパクト性]

$\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ はコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-3}}$ [実数直線がコンパクトでないこと．また自然数全体のあるコンパクト化]
$\mathbb{R}$ はコンパクトでないことを示せ．一方 $\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ はコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-4}}$ [ハウスドルフ空間のコンパクト集合]
ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-5}}$ [コンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射連続写像]
コンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射連続写像は同相写像である.

$\boxed{\text{問題 18-6}}$ [コンパクト性]
次の条件は同等であることを示せ.

(1) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトである.

(2) $(X, \mathcal{O})$ の閉集合の族 $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもてば、常に $\cap\mathfrak{A} \neq \emptyset$ である.

$\boxed{\text{問題 18-7}}$ [コンパクト距離空間]
(X, d) をコンパクト距離空間とする．このとき、ルベーグ数として正の実数がとれることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-8}}$ [コンパクトハウスドルフ空間は正規性]
コンパクトハウスドルフ空間は正規であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-9}}$ [コンパクト集合の連続像]
コンパクト集合の連続像もコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-10}}$ [単位閉区間]
単位閉区間はコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-11}}$ [積空間]
コンパクト集合空間の 2 つの積空間もコンパクトであることを示せ．ただし、選択公理（チコノフの定理）を使わない証明を与えよ.

$\boxed{\text{問題 18-12}}$ [局所コンパクトハウスドルフ空間]
局所コンパクトハウスドルフ空間はチコノフ空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-13}}$ [無限部分集合]
コンパクト空間 X の無限部分集合 A は集積点を持つことを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-14}}$ [距離空間のコンパクト集合]
距離空間のコンパクト集合は有界であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-15}}$ [局所コンパクトハウスドルフ空間]
局所コンパクトハウスドルフ空間は正則であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-16}}$ [部分空間の距離]
(X, d) を距離空間とする．X において A をコンパクト部分空間とし、B を閉部分集合とし、互いに交わらないとする．このとき、$d(A, B) > 0$ であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-17}}$ [一点コンパクト化]
$\mathbb{R}^2$ の一点コンパクト化は S^2 と同相であることを示せ．ここで S^2 の位相はどちらも $\mathbb{R}^3$ の相対位相から誘導されるものとする.

$\boxed{\text{問題 18-18}}$ [自然数の一点コンパクト化]
$\mathbb{N}$ の一点コンパクト化は $\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ と同相であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-19}}$ [有限交叉性と収束]

位相空間 X において、$\{p_n\}$ を点列として、$M_n = \{p_n, p_{n+1}, \cdots, \}$ とおく．このとき、M_n は有限交叉性をもち、$\{p_n\}$ が $p \in X$ 収束することと、M_n が p に収束することは同値であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 18-20}}$ [有限交叉性をもつ極大集合]
有限交叉性をもつ集合の集まり $\mathcal{F}$ に関して極大な集合 $\mathcal{M}$（フィルターに対する極大フィルターなど）は次を満たすことを示せ．
(1) $\emptyset \notin \mathcal{M}$. (2) $A, B \in \mathcal{M}$ なら $A \cap B \in \mathcal{M}$. (3) $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subset B$ なら $B \in \mathcal{F}$ (4) 任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $A \cap M \neq \emptyset$ なら $A \in \mathcal{M}$.

$\boxed{\text{問題 18-21}}$ [有限交叉性]
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値であることを示せ．

1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクト
2. $(X, \mathcal{O})$ の閉集合族 $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもてば、常に、$\cap\mathfrak{A} \neq \emptyset$

$\boxed{\text{問題 18-22}}$ [コンパクト]
集合 X と X の 1 つの元 ω を与えておく．X の部分集合族 $\mathcal{O}$ を $\emptyset, \{\omega\}$ および、X の有限集合の補集合の全体からなるものとすれば、$\mathcal{O}$ は X 上の位相となり、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであることを示せ．

$\boxed{\text{問題 18-23}}$ [一点コンパクト化]
位相区間 $(X, \mathcal{O})$ の一点コンパクト化 $(X^*, \mathcal{O}^*)$ について $(X^*, \mathcal{O}^*))$ がハウスドルフ空間であるための必要十分条件は局所コンパクトハウスドルフ空間であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 18-24}}$ [一点コンパクト化]
位相区間 $(X, \mathcal{O})$ の一点コンパクト化 $(X^*, \mathcal{O}^*)$ について $(X, \mathcal{O}))$ が $(X^*, \mathcal{O}^*))$ において稠密であるための必要十分条件は $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトでないことである．

$\boxed{\text{問題 18-25}}$ [コンパクト性]
距離空間 (X, d) に対して次は同値であることを示せ．

(1) (X, d) がコンパクトである．

(2) (X, d) は任意の点列は収束する部分列をもつ．

(3) (X, d) は全有界かつ完備である．

$\boxed{\text{問題 18-26}}$ [単位球面のコンパクト性]
任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、n 次元単位球面 S^n はコンパクトであるが、問題 18-25 の同値条件を用いることで (ℓ^2, d_∞) 上の単位球面はコンパクトでないことを示せ．

$\boxed{\text{問題 18-27}}$ [コンパクト集合]
有限部分被覆を持たない閉被覆をもつコンパクト集合の例を与えよ．

$\boxed{\text{問題 18-28}}$ [コンパクトな近傍]
局所コンパクトハウスドルフ空間はコンパクトな近傍全体は基本近傍基となることを示せ．すなわち、各点 x の任意の近傍は点 x のコンパクト近傍を包む．

$\boxed{\text{問題 18-29}}$ [点列コンパクト空間]
点列コンパクト空間の可算積空間 $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ は点列コンパクトである．

$\boxed{\text{問題 18-30}}$ [一点コンパクト化]
局所コンパクト可分距離づけ可能空間の一点コンパクト化は距離づけ可能であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 18-31}}$ [コンパクト距離空間]
距離空間がコンパクトなら、任意の点列は収束部分列を持つ

$\boxed{\text{問題 18-32}}$ [ゾルゲンフライ直線のリンデレーフ性]
ゾルゲンフライ直線はリンデレーフであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-33}}$ [コンパクト空間の増大列]
連結な距離空間 X がコンパクトな部分距離空間の増大列 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ を使って $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$ と表せるとする．いま、任意の i に対して $\mathrm{diam}(X_{i+1} - X_i) < \dfrac{1}{i^2}$ であるなら、X も有界となるか？

$\boxed{\text{問題 18-34}}$ [局所コンパクトハウスドルフ空間]
局所コンパクトハウスドルフ空間において互いに交わらないコンパクト集合と閉集合は開集合で分離されることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-35}}$ [コンパクト空間のパラコンパクト性]
コンパクト空間はパラコンパクト空間であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-36}}$ [離散空間のパラコンパクト性]
離散空間はパラコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-37}}$ [局所有限]
$\{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ は局所有限でないことを示せ.

$\boxed{\text{問題 18-38}}$ [可算個の部分開被覆]
コンパクトではなく、任意の開被覆に対して可算個の部分被覆が存在する例を挙げよ.

---

§19 完備距離空間・全有界

$\boxed{\text{問題 19-1}}$ [縮小写像]
距離空間上の縮小写像は連続写像であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 19-2}}$ [縮小写像]
X が完備な距離空間であるとき、$f : X \to X$ を縮小写像とすると $f(x) = x$ となる $x \in X$ がただ一つ存在することを示せ.

$\boxed{\text{問題 19-3}}$ [全有界距離空間]
全有界距離空間は有界かつ可分であることを示せ．またどんな部分距離空間も全有界であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 19-4}}$ [コンパクト]
距離空間において次が同値であることを示せ.

1. (X, d) はコンパクトである.
2. (X, d) は全有界かつ X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ はルベーグ数をもつ.

$\boxed{\text{問題 19-5}}$ [局所コンパクト距離空間]
局所コンパクト距離づけ可能空間は完備距離づけ可能空間である.

$\boxed{\text{問題 19-6}}$ [可算積空間]
完備距離づけ可能な空間の可算積空間は完備距離づけ可能である.

$\boxed{\text{問題 19-7}}$ [有界と全有界]

有界だが全有界でない距離空間の例をあげよ.

$\boxed{\text{問題 19-8}}$ [完備部分集合]
距離空間 $X=(X,d)$ の完備な部分集合は X において閉集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 19-9}}$ [完備距離空間の閉集合]
完備距離空間の閉集合は完備部分集合であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 19-10}}$ [完備化]
距離空間 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ の完備化 $(\tilde{X},\tilde{d}_X),(\tilde{Y},\tilde{d}_Y)$ に対して、一様連続写像 $f:X\to Y$ は一様連続写像 $\tilde{f}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$ に一意的に拡張されることを示せ.

$\boxed{\text{問題 19-11}}$ [完備部分集合]
距離空間 $X=(X,d)$ の完備な部分集合は X において閉集合であることを示せ.

---

§20 ベール空間・写像空間

$\boxed{\text{問題 20-1}}$ [写像空間]
単位区間 $I=[0,1]$ 上の実数値連続関数全体 $C(I)$ において、$f,g\in C(I)$ にたいして、$d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)||x\in I\}$ とすると、d は $C(I)$ 上距離関数となることを示せ. また、$\varphi:C(I)\to\mathbb{R}$ を $\varphi(f)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ と定義すると、φ は連続写像であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 20-2}}$ [第一類、第二類]
第一類である部分集合の部分集合は第一類である. よって第二類である部分集合を含む部分集合は第二類である. また第一類である部分集合の可算個の和集合は第一類である.

$\boxed{\text{問題 20-3}}$ [可算個の和集合]
第一類である部分集合の可算個の和集合は第一類である.

$\boxed{\text{問題 20-4}}$ [可算部分集合]
X が孤立点を持たない T_1 空間であれば、すべての可算部分集合は第一類である.

$\boxed{\text{問題 20-5}}$ [ベール集合]
位相空間 X において次が全て同値であることを示せ.

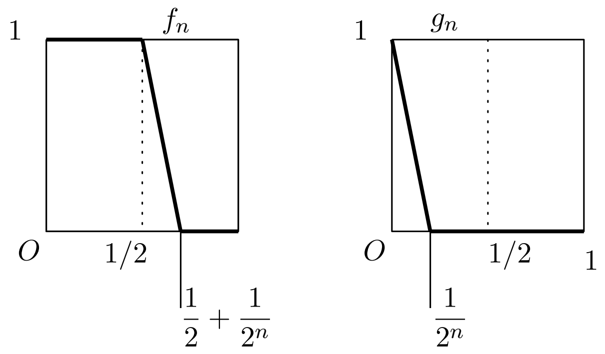
(1) X はベール集合.
(2) 内点を持たない閉集合の可算個の和集合は内点を持たない.
(3) 第一類である部分集合は内点を持たない.
(4) 空でない開集合は第二類である.

$\boxed{\text{問題 20-6}}$ [連続関数全体の空間上の距離]
$C[0,1]$ の 2 元 f,g に対して、

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

と定義する.

1. d は $C[0,1]$ 上の距離関数になることを示せ.
2. 上の距離関数 $d(f,g)$ に対して、$C[0,1]$ の元、f_n,g_n（$n\in\mathbb{N}$）を



として定義する．このとき以下の全ての問題に答えよ．

(a) 点列 $(f_n|n \in \mathbb{N})$、$(g_n|n \in \mathbb{N})$ はともに基本列であることを示せ．

(b) この二つの点列は $C[0,1]$ の点に収束するか．

問題 20-7 [コンパクト開位相]
X の任意の部分集合 A および Y の任意の閉集合 B に対して、$W(A,B)$ は $C(X,Y)$ 上のコンパクト開位相に関して閉集合であることを示せ．

問題 20-8 [コンパクト開位相]
位相空間 X,Y に対して、$C(X,Y)$ にコンパクト開位相をいれておく．Y がハウスドルフであれば、$C(X,Y)$ もハウスドルフであることを示せ．

問題 20-9 [コンパクト開位相]
位相空間 X,Y に対して、$C(X,Y)$ にコンパクト開位相をいれておく．Y が T_3 空間であれば、$C(X,Y)$ も T_3 であることを示せ．

問題 20-10 [sup ノルム]
$C^*(X)$ を位相空間 X 上の実数値有界連続関数全体とする．$C^*(X)$ 上の sup ノルムを

$$||f|| = \sup\{|f(x)|\,|x \in X\}$$

として与えると、C^* はノルム空間となる．この空間はバナッハ空間となることを示せ．

問題 20-11 [連続関数列]
連続関数列 $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ がある正の実数列 $a_n > 0$ で、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ を満たすものに対して、$|f_n(x)| \leq a_n$ $(\forall x \in X)$ となるならば、連続関数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n : X \to \mathbb{R}$ が $(\displaystyle\sum_{=1}^{\infty} f_n)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ により定義されることを示せ．

問題 20-12 [バナッハ空間への等距離埋め込み写像 (**定理** 14.15(酒井))]
距離空間 $X = (X,d)$ において、点 $x_0 \in X$ を固定し、各点 $x \in X$ に対して、連続関数 $\varphi(x) : X \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$\varphi(x)(y) = d(x,y) - d(x_0,y) \quad (\leq d(x,x_0)) \quad (y \in X)$$

このとき、$\varphi(x) \in C^*(X)$ となり、$\varphi(x)$ は有界であり、$\varphi : X \to C^*(X)$ は等距離写像となることを示せ．すなわち、X はバナッハ空間 $C^*(X)$ に等距離に埋め込まれることを示せ．

問題 20-13 [ディニの定理]
X をコンパクト空間とする．X 上の実連続関数列 $(f_n|n \in \mathbb{N})$ と、X 上の実連続関数 f について、次の２条件が成り立てば、関数列 f_n は f に一様収束する．

1. すべての $x \in X, n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ である．

2. すべての $x \in X$ に対して、

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

が成り立つ.

$\boxed{\text{問題 20-14}}$ [局所コンパクトハウスドルフ空間上の写像空間]
X, Y, Z を位相空間とし、Y を局所コンパクトハウスドルフ空間とする．このとき、結合写像

$$\mu : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$$

（ただし、$\mu(f,g) = f \circ g$）は連続である．ただし、$C(X,Y)$ にはコンパクト開位相が入っているとする．

$\boxed{\text{問題 20-15}}$ [コンパクト開位相]
位相空間 X, Y および、$C(X,Y)$ の部分集合 H について、$\Phi_H : H \times X \to Y$ を $\Phi_H(h,x) = h(x)$ として定義する．以下の問題に答えよ．

1. 集合 H 上の位相 $\mathcal{O}$ に関して、Φ_H が連続であれば、位相 $\mathcal{O}$ は、H 上のコンパクト開位相より大きい．

2. X が局所コンパクトハウスドルフ空間である場合、集合 H 上のコンパクト開位相に関して、Φ_H は連続であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 20-16}}$ [逆写像のなす写像]
$\mathcal{H}$ を $C(X,X)$ の同相写像のなす部分空間とする．X をコンパクトハウスドルフ空間とすると、$\nu : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\ \ (\nu(h) = h^{-1})$ は連続であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 20-17}}$ [adjoint]
連続写像 $f : X \times Y \to Z$ となるとき、$\mathrm{ad}(f) : X \to C(Y,Z)$ を $\mathrm{ad}(f)(x) = f(x,\cdot) : Y \to Z$ として定義する．このとき、$\mathrm{ad}(f)$ は連続写像であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 20-18}}$ [adjoint2]
X, Y がハウスドルフ空間とする．このとき、上の写像を用いて、$\mathrm{ad} : C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$ は連続であることを示せ．さらに、Y が局所コンパクトであれば、ad は同相であることを示せ．

$\boxed{\text{番外問題 1}}$ [有限位相空間]
$\{1,2,3\}$ 上の位相は 29 通りあるが、一般に n 点集合上の位相の数 $T(n)$ を求める方法を考えよ．
参照
`http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_topological_space`

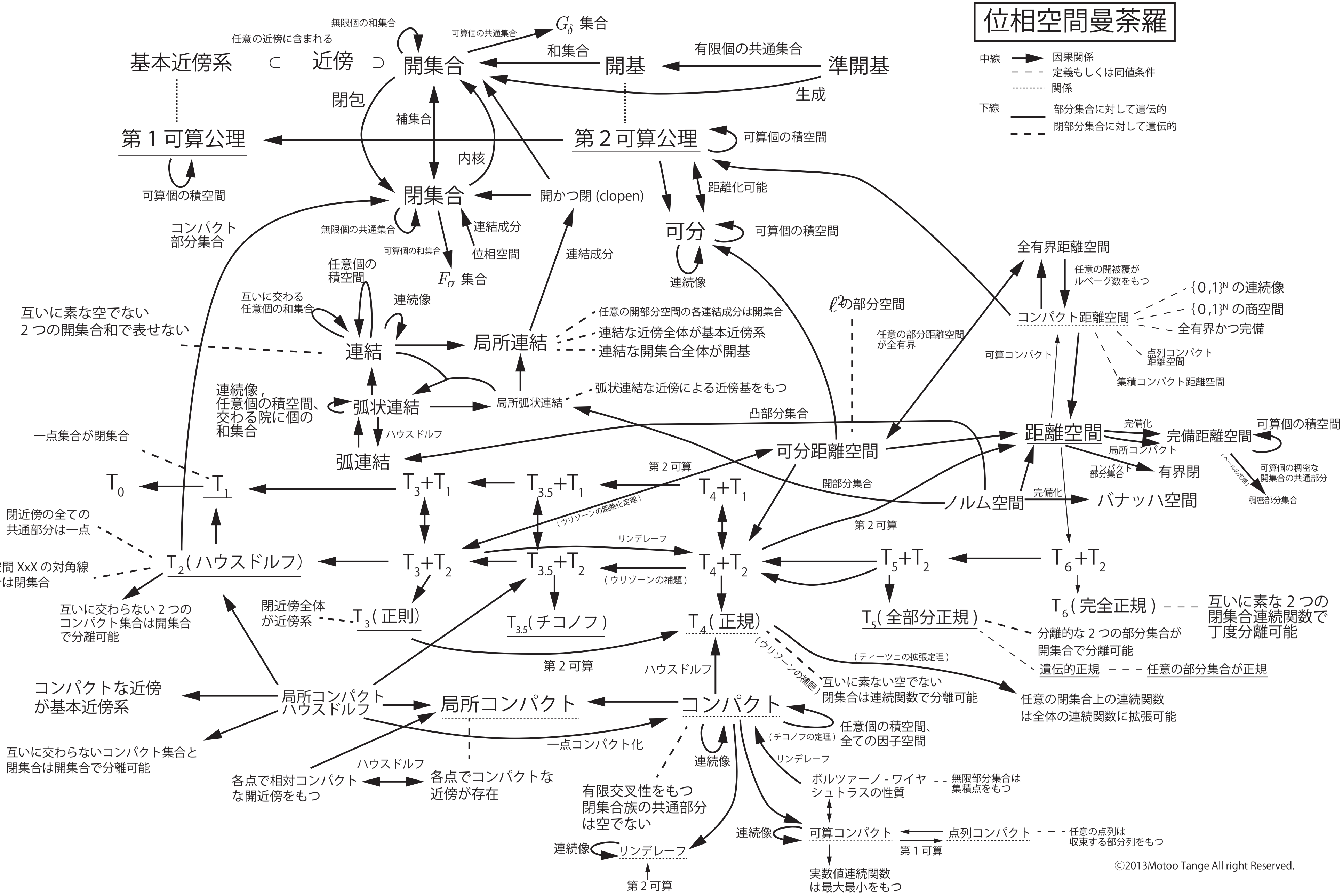
参考文献

集合と位相空間（森田茂之）朝倉書店
集合と位相（内田伏一）裳華房.
位相空間の基礎概念（酒井克郎）Web で検索のこと.
位相空間論（森田紀一）絶版なので図書館にて探すこと.
Counterexamples in topology(Lynn Arthur Steen and J.Arthur Seebach Jr.)Dover.
トポロジーへの招待（寺澤順）日本評論社

Homepage：
Webpage of Motoo Tange (`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/top.html`)
Twitter：
BasicMathIIB (`https://twitter.com/BasicMathIIB`)
Blog：
Motoo Tange's blog (`http://motochans.blogspot.jp`)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.

位相空間曼荼羅



中線
因果関係
定義もしくは同値条件
関係
下線
部分集合に対して遺伝的
閉部分集合に対して遺伝的
基本近傍系
⊂
近傍
⊃
任意の近傍に含まれる
開集合
無限個の和集合
可算個の共通集合
G_δ 集合
和集合
開基
有限個の共通集合
準開基
生成
閉包
補集合
内核
第１可算公理
第２可算公理
可算個の積空間
閉集合
開かつ閉 (clopen)
距離化可能
可分
コンパクト
部分集合
無限個の共通集合
可算個の和集合
連結成分
位相空間
F_σ 集合
連続像
全有界距離空間
任意の開被覆が
ルベーグ数をもつ
{0,1}^{N} の連続像
{0,1}^{N} の商空間
全有界かつ完備
コンパクト距離空間
点列コンパクト
距離空間
集積コンパクト距離空間
可算コンパクト
任意個の
積空間
互いに交わる
任意個の和集合
互いに素な空でない
２つの開集合和で表せない
連結
局所連結
任意の開部分空間の各連結成分は開集合
連結な近傍全体が基本近傍系
連結な開集合全体が開基
ℓ^2の部分空間
任意の部分距離空間
が全有界
連続像，
任意個の積空間、
交わる院に個の
和集合
弧状連結
局所弧状連結
弧状連結な近傍による近傍基をもつ
ハウスドルフ
凸部分集合
弧連結
一点集合が閉集合
可分距離空間
完備化
完備距離空間
局所コンパクト
コンパクト
部分集合
有界閉
（ベールの定理）
可算個の稠密な
開集合の共通部分
稠密部分集合
T$_0$
T$_1$
T$_3$+T$_1$
T$_{3.5}$+T$_1$
第２可算
T$_4$+T$_1$
開部分集合
ノルム空間
バナッハ空間
（ウリゾーンの距離化定理）
閉近傍の全ての
共通部分は一点
第２可算
積空間 XxX の対角線
集合は閉集合
T$_2$（ハウスドルフ）
T$_3$+T$_2$
リンデレーフ
T$_{3.5}$+T$_2$
T$_4$+T$_2$
T$_5$+T$_2$
T$_6$+T$_2$
（ウリゾーンの補題）
互いに交わらない２つの
コンパクト集合は開集合
で分離可能
閉近傍全体
が近傍系
T$_3$（正則）
T$_{3.5}$（チコノフ）
T$_4$（正規）
T$_5$（全部分正規）
T$_6$（完全正規）
互いに素な２つの
閉集合連続関数で
丁度分離可能
分離的な２つの部分集合が
開集合で分離可能
第２可算
（ウリゾーンの補題）
（ティーツェの拡張定理）
遺伝的正規
任意の部分集合が正規
ハウスドルフ
互いに素ない空でない
閉集合は連続関数で分離可能
任意の閉集合上の連続関数
は全体の連続関数に拡張可能
コンパクトな近傍
が基本近傍系
局所コンパクト
ハウスドルフ
局所コンパクト
コンパクト
任意個の積空間、
全ての因子空間
（チコノフの定理）
互いに交わらないコンパクト集合と
閉集合は開集合で分離可能
一点コンパクト化
ハウスドルフ
各点で相対コンパクト
な開近傍をもつ
各点でコンパクトな
近傍が存在
連続像
リンデレーフ
有限交叉性をもつ
閉集合族の共通部分
は空でない
ボルツァーノ - ワイヤ
シュトラスの性質
無限部分集合は
集積点をもつ
連続像
リンデレーフ
第２可算
連続像
可算コンパクト
点列コンパクト
第１可算
任意の点列は
収束する部分列をもつ
実数値連続関数
は最大最小をもつ

数学者の名前：

ピタゴラス	ユークリッド	アルキメデス
エラトステネス	フィボナッチ	ネイピア
デカルト	フェルマー	パスカル
ニュートン	ライプニッツ	ベルヌーイ
テイラー	マクローリン	オイラー
ラプラス	ダランベール	ガウス
フーリエ	ラグランジュ	コーシー
アーベル	ディリクレ	ハミルトン
クンマー	ガロア	ワイエルシュトラス
エルミート	リーマン	クロネッカー
デデキント	カントール	クライン
ミンコフスキー	コワレフスカヤ	ポアンカレ
ヒルベルト	パンルヴェ	ルベーグ
高木貞治	ランダウ	ラマヌジャン
コルモゴルフ	岡潔	カルタン
ゲーデル	ヴェイユ	ノイマン
小平邦彦	セルバーグ	グロタンディーク
アティヤ	ミルナー	トンプソン