トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

補足・追加プリント (2016.1.17(第 11 回))

---

§3 内点・外点

$\boxed{\text{問題 3-22}}$ [閉包と有向点列の収束]
X を位相空間とし、$A \subset X$ を部分集合、$x_0 \in X$ が $x_0 \in \mathrm{Cl}(A)$ であるための必要十分条件は、x_0 に収束する有向点列 $\varphi : D \to X$ が存在することであることを示せ.

---

§17 分離公理

17-7. 有向集合 ••• 集合 D の元の間の 2 項関係 $\prec$ が以下の条件を満たすとき、$\prec$ は有向順序

1. $a \in D$ に対して、$a \prec a$
2. $a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c$
3. 任意の $a, b \in D$ に対して、$a \prec c$ かつ $b \prec c$ を満たす $c \in D$ が存在する.

$(D, \prec)$ を有向集合という.

$\boxed{\text{問題 17-35}}$ [有向点列と有向点列の収束]
X を空間、D を有向集合とする. 写像 $\varphi : D \to X$ を有向点列といい、$x_0 \in X$ に対して、x_0 の任意の近傍 $U(x_0)$ に対して、

$$d \prec d \Rightarrow \varphi(d) \in U(x_0)$$

となる $d_0 \in D$ が存在するとき、有向点列 φ が x_0 に収束するという.

$\boxed{\text{問題 17-36}}$ [ハウスルドルフ性と有向点列]
位相空間 X に対して、以下は同値であることを示せ.

1. X はハウスルドルフ
2. X における有向点列の極限がただ一つである.

---

§18 コンパクト性

18-15. フィルター基底 ••• 空間 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が

- $U, K \in \mathcal{F}$ に対して、$L \subset U \cap K$ なる $L \in \mathcal{F}$ が存在する.
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$

を満たすものをフィルター基底という.

18-16. 生成するフィルター•••フィルター基底$\mathcal{F}$に対して、$\mathcal{E} = \{E \subset X | F \subset E$ となる $F \in \mathcal{F}$ が存在す
は、$\mathcal{F}$ を含むフィルターとなる $\mathcal{E}$ を $\mathcal{F}$ が生成するフィルターという.

問題 18-45 [コンパクト性と極大フィルター]
位相空間 X がコンパクトであるためには、X の任意の極大フィルター (ウルトラフィルター) が収束することが必要十分であることを示せ.

問題 18-46 [フィルター基底]
位相空間 X とし、$\mathcal{A}$ を有限交叉性をもつ部分集合の族とする．このとき、

$$\mathcal{A}' = \{K_1 \cap \cdots \cap K_n | K_i \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\}$$

は $\mathcal{A}$ を含むフィルター基底となることを示せ.