トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

§1 集合・不等式・連続関数

1-1. 互いに素 ••• 集合 X の部分集合 A, B に対して、$A, B \subset X$ が $A \cap B = \emptyset$ となるとき、A, B は互いに素という.

1-2. 補集合 ••• 集合 X の部分集合 A の補集合を A^c とかく.

1-3. 連続濃度 ••• $\mathfrak{c}$ を連続体濃度とする．つまり、$\mathfrak{c} = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ とする.

1-4. ベルンシュタインの定理 ••• 集合 A, B において、$f : A \to B$、$g : B \to A$ なる単射が存在したとすると A と B の間に全単射が存在する.

§2 距離空間

2-1. 距離関数 ••• X を集合とし、$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ が距離関数であるとは、任意の X の 2 点 x, y に対して、実数 $\rho(x, y)$ が定められているものをいう.

1. $\rho(x, y) \geq 0$ かつ $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. X の任意の 2 元 x, y に対し、$\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. X の任意の 3 元 x, y, z に対し、$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

2-2. 距離空間 ••• (X,ρ) が集合 X と X 上の距離関数が与えられたものを距離空間という.

例：I を単位閉区間 $[0,1]$ とする.

- $\mathbb{R}^\infty = \left\{ (x_n) | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{が収束する} \right\}$ と定義する．これをヒルベルト空間という.
- $C(I) = \{f(x)|f(x)$ は I 上の実数値連続関数 $\}$

2-3. r-球 ••• (X,d) を距離空間とする．$B(p,r) = \{y \in X | d(y,p) < r\}$ と定義し、$B(p,r)$ を r-球という.

2-4. 部分集合の距離、直径 ••• X を距離空間とし、$A, B \subset X$ のとき、

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y)|x \in A, y \in B\},\ \delta(A) = \sup\{\rho(x,y)|x,y \in A\}$$

を A, B の**距離**、**直径**という.

2-5. p 進付値 ••• p を素数とする．任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、ある p と互いに素な整数 a を使って、$n = ap^r \quad (r \geq 0)$ と一意的に書ける．このとき、$\varphi_p(n) = \begin{cases} 2^{-r} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$ と定義する．この関数 $\varphi_p(n)$ を p 進付値という.

2-6. ルベーグ数 ••• 距離空間の開被覆を B とする．δ をある正の実数とする．直径が δ より小さい任意の部分集合はあ る B の元に含まれるとき、この δ をルベーグ数という.

2-7. 距離化可能 ••• 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が X 上のある距離 d が存在して、$\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$（$d$ から決まる距離位相）となるとき、$(X,\mathcal{O})$ は距離化可能という．このような距離を $(X,\mathcal{O})$ の許容距離という.

---

§3 内点・外点

3-1. 距離空間の内点、外点、境界点 ••• X を距離空間とし、$A \subset X$ とする.

p が A の**内点** $\mathrm{Int}(A)$ であるとは、ある $\epsilon > 0$ が存在して、$B(p,\epsilon) \subset A$ となることをいう.
p が A の**外点** $\mathrm{Int}(A^c)$ であるとは、ある $\epsilon > 0$ が存在して、$B(p,\epsilon) \cap A = \emptyset$ となることをいう.
p が A の**境界点**とは、任意の $\epsilon >$ に対して、$B(p,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B(p,\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ となることをいう.

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 A の内点 $\mathrm{Int}(A)$、外点 $\mathrm{Int}(A^c)$、境界点の定義は、距離空間における定義の ϵ-近傍を全て開集合に変えて定義すればよい.

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において $A \subset X$ の内部 (内点全体) を $\mathrm{Int}_X(A)$ とかくこともある.

3-2. 集積点、閉包、触点 ••• 距離空間 (X,ρ) において、$A \subset X$ とする．$p \in X$ が**集積点**であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$B(p,\epsilon) \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$ となるときをいう．集積点全体のことを**導集合**といい、A^d と書くことがある．A と A の集積点全体の和集合を $\mathrm{Cl}(A)$ とかき、A の**閉包**、もしくは、**触点**ともいう.

X が位相空間の場合、任意の ϵ-近傍の代わりに、p を含む任意の開集合を取って、**集積点**、**導集合**や、**閉包**、**触点**が定義できる.

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において $A \subset X$ の閉包を $\mathrm{Cl}_X(A)$ をとかくこともある.

---

§4 開集合・閉集合

4-1. 距離空間の開集合 ••• (X, ρ) を距離空間とする．部分集合 $A \subset X$ が開集合とは、任意の点 $p \in A$ に対して、$B(p, \epsilon) \subset A$ となる正の実数 ϵ が存在することである．
4-2. 距離空間の閉集合 ••• 部分集合 $A \subset X$ が閉集合であるとは、開集合の補集合となるときいう．

---

§5 近傍

5-1. 近傍系 ••• 集合 X の各元 x に対して、以下を満たす X の部分集合の空でない族 $\mathcal{U}(x)$ が定められるとき、$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x) | x \in X\}$ を X の近傍系という．

1. $U \in \mathcal{U}(x)$ ならば、$x \in U$
2. $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ かつ $U_2 \in \mathcal{U}(x)$ ならば、$U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となる $U_3 \in \mathcal{U}(x)$ が存在する．
3. $U \in \mathcal{U}(x)$、$y \in U$ ならば、$V \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{U}(y)$ が存在する．

集合上に近傍系が定められる t とき、ただひとつ X 上に位相を定めることができる．
5-2. 近傍 ••• 近傍系に属する集合をその点の近傍という．位相空間 X の x での近傍全体を $\mathcal{N}(x)$ もしくは $\mathrm{Nbd}_X(x)$ と書くことがある．

---

§6 位相空間

6-1. 位相空間 ••• X を集合とする．$\mathcal{O}$ を X の部分集合の族とする．以下を満たす $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という．

$\mathbf{O}_1$ 全体集合 X、空集合 $\emptyset$ は $\mathcal{O}$ に属する．

$\mathbf{O}_2$ 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $O_1, \cdots, O_k \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \cdots O_k \in \mathcal{O}$

$\mathbf{O}_3$ $\{O_\lambda | \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}\}$ ならば $\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

6-2. 離散位相 ••• 集合 X に対して、位相 $\mathcal{O}$ が X の部分集合全体であるとき、$(X, \mathcal{O})$ を離散空間であるという．

6-3. 順序位相•••$(X, \leq)$ を全順序集合とする．X 外の $\{\infty, -\infty\}$ をとり、任意の $x \in X$ に対して、$-\infty < x < \infty$ となる順序を入れる．$\mathcal{O}_{\leq} = \{U \subset X | \forall x \in U, \exists a, b \in X \cup \{\pm\infty\}$ に対して、$x \in (a, b) \subset U\}$ とおく．このとき、$(X, \mathcal{O}_{\leq})$ は位相空間となる．この位相を順序位相という．

6-4. 有限補集合位相 ••• X を集合として $\mathcal{O} = \{U \subset X | U = \emptyset \text{ or } X - U :$ 有限集合 $\}$ としたときに得られる位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を有限補集合位相という．

6-5. ゾルゲンフライ直線 ••• 右半開区間全体 $\{[a, b) | a < b\}$ によって生成される $\mathbb{R}$ 上の位相を右半開区間位相（下限位相）と呼び、この位相をもつ $\mathbb{R}$ を $\mathbb{S}$ と表し、ゾルゲンフライ直線と呼ぶ.

6-6. 位相的曲面 (surface) ••• ある位相空間 Σ が各点 p において、通常の $\mathbb{R}^2$ の開集合と同相な近傍を持つことができるとき、Σ を位相的曲面という．トーラスや球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ は位相的曲面ある．

6-7. 球面 (sphere) ••• $\{(x_0, x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ となる空間を n 次元球面と

いう.

---

§7 連続写像

7-1. 距離空間の連続写像 ••• 距離空間の間の写像 $(X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ に対して、x_0 で連続であるとは、任意の ϵ に対して、$d_1(x_0, x) < \delta$ となる任意の x に対して、$d_2(f(x_0), f(x)) < \epsilon$ となるような δ が存在することである.

書き直せば、任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$$

となるような δ が存在することである.

7-2. 連続写像 ••• $f : (X_1, \mathcal{O}_1) \to (X_2, \mathcal{O}_2)$ が連続であるとは、任意の $U \in \mathcal{O}_2$ に対して、$f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1$ であることをいう.

7-3. 連続写像の近傍基を用いた定義 ••• 位相空間 $(X, \mathfrak{T}_X)$、$(Y, \mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とする. $\mathcal{U}(x)$ を X の点 x の近傍基、$\mathcal{V}(y)$ を Y の点 y の近傍基とする. 写像 $f : X \to Y$ が $x_0 \in X$ で連続であるとは、$y_0 = f(x_0)$ の任意の近傍 $V(y_0) \in \mathcal{V}(y_0)$ に対し、

$$x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(y_0)$$

となるような $U(x_0) \in \mathcal{U}(x_0)$ を定めることができることをいう. 各点で連続であるような写像 f のことを連続写像という.

---

§8 開基

8-1. 開基 ••• β が位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ のいくつかの開集合からなる集合族であって、$(X, \mathfrak{T})$ の任意の開集合が、β の部分集合 B の和として $U = \cup_{U_b \in B} U_b$ 表されるとき、β を位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ の開基という.

8-2. 準開基 ••• X の開集合の族 $\mathcal{S}$ で、$\mathcal{S}$ に属する有限個の開集合の共通部分全体が X の開基となるものを X の準開基と呼ぶ. すなわち、

$$\mathcal{S} \text{ が } X \text{ の準開基である}$$

$$\Leftrightarrow \{V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n | n \in \mathbb{N}, V_1, V_2, \cdots, V_n\} \text{ が } X \text{ の開基}$$

8-3. 生成する ••• $\mathcal{L}$ が位相空間 $\mathcal{O}$ の準開基であるとき、$\mathcal{O}$ は $\mathcal{L}$ によって生成されるという.

---

§9 収束

9-1. コーシー列 ••• 距離空間 (X, d) において次の性質を満たす点列 (x_n)

$$\forall \epsilon > 0 \text{ において、ある } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ such that } n, m \geq n_0 \text{ ならば、} d(x_n, x_m) < \epsilon$$

9-2. 距離空間上の点列の収束 ••• 距離空間 (X,ρ) の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある n_0 が存在して、$n > n_0$ なるすべての n に対して、$d(x_n, x) < \epsilon$ となることをいう．

9-3. 位相空間上の収束 ••• 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の点列 $x_n \in X$ が $x \in X$ に収束するとは、任意の $U \in \mathrm{Nbd}_X(x)$ に対して、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、$\forall n \geq n_0$ に対して $x_n \in U$ が成り立つ．このとき、x_n は x に収束するといい、$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と表す．

9-4. 点列の極限点、集積点 （limit point of a sequence） ••• $\{x_n\}$ を位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の点列とする．このとき、

「$x \in X$ が**点列** $\{x_n\}$ **の極限点** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x を含む任意の開集合 U に対して、有限個の x_n を除いて、$x_n \in U$ となる.」

このとき、$\{x_n\}$ **は** x **に収束する**という (p.85).

「$x \in X$ が**点列** $\{x_n\}$ **の集積点** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x を含む任意の開集合 U に対して、無限個の x_n が $x_n \in U$ となる.」

9-5. 有限交叉性をもつ部分集合の収束 ••• 位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{M}$ が有限交叉性を持つとする．このとき、$\mathcal{M}$ が $p \in X$ に収束するとは、p に任意の近傍 U に対して $M \subset U$ となる $M \in \mathcal{M}$ が存在するときにいう．

---

§10 可算公理

10-1. 第 1 可算公理 ••• 各点において可算個の近傍基をもつような位相空間のこと．

10-2. 第 2 可算公理 ••• 可算個の開基をもつ位相空間のこと．

10-3. 可分 ••• 可算個の点の閉包からなる位相空間のこと．つまり、稠密な可算部分集合が存在すること．

---

§11 相対位相

11-1. 部分位相、相対位相 ••• 位相空間 $(X,\mathfrak{T})$ とする．$Y \subset X$ を部分集合とする．このとき、Y の位相として、

$$\mathfrak{T} \cap Y = \{U \cap A | U \in \mathfrak{T}\}$$

とすることで、$(Y, \mathfrak{T} \cap Y)$ は位相空間とみなせる．この位相空間を $(X,\mathfrak{T})$ における Y の部分位相および、相対位相という．

---

§12 開写像・閉写像

12-1. 開写像 ••• 写像 $f : X \to Y$ のうち、任意の開集合 $U \subset X$ に対してその像 $f(U)$ も開集合となるもののこと．

12-2. 閉写像 ••• 写像 $f : X \to Y$ のうち、任意の閉集合 $F \subset X$ に対してその像 $f(F)$ も閉集合となるもののこと．

---

§13 商写像・商空間

13-1. 商写像 ••• 位相空間の間の全射 $f : (X,\mathcal{O}) \to (Y,\mathcal{O}')$ で上の条件

$$H \text{ が } Y \text{ の開集合} \Leftrightarrow f^{-1}(H) \text{ が } X \text{ の開集合} \qquad (*)$$

を満たすものを商写像という.

13-2. 商位相 ••• $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. $f : X \to Y$ が全射であり、Y 上に上の条件 $(*)$ を満たすように位相をいれたものを Y 上の f による商位相という.

13-3. 商空間 ••• 位相空間 X 上の同値関係 σ に対して σ による商集合 X/σ に対して自然な全射 $X \to X/\sigma$ による商位相を同値類集合 X/σ に入れる. このような X/σ 上の位相空間を商空間という.

13-4. 商空間のある定理•••商写像 $f : X \to Y$ に対して、$\tilde{f} : X/f \to Y$ を $\tilde{f}(f^{-1}(y)) = y \ (y \in Y)$ と定義すると $\tilde{f}$ は同相写像となる. また、$q_f : X \to X/f$ を商空間 X/f の商写像とすれば、$\tilde{f} \circ q_f = f$ を満たす.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q_f"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/f \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & Y \end{tikzcd}$$

13-5. アニュラス (annulus) ••• $I = [0, 1]$ として、$I \times I$ に対して、$(0, x) \sim (1, x)$ となる同一視を入れた商空間をアニュラスといい、$\mathbf{A}^2$ とかく. $\mathbf{A}^2$ は $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$ と同相である.

13-6. 実（or 複素）射影空間 (real (or complex) projective space) ••• $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$（or $\mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$）に対して、同値関係を

$$(x_0, x_1, \cdots, x_n) \sim (y_0, y_1, \cdots, y_n) \Leftrightarrow (x_0, \cdots, x_n) = (ry_1, ry_2, \cdots, ry_n) \text{ where } r \in \mathbb{R}(\text{or } \mathbb{C})$$

として定義する. このとき、$\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}/\sim$（or $\mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}/\sim$）を n 次元実（or 複素）射影空間といい $\mathbb{R}P^n$（or $\mathbb{C}P^n$）とかく. $\mathbb{R}P^1$（or $\mathbb{C}P^1$）のことを実（or 複素）射影直線といい、$\mathbb{R}P^2$（or $\mathbb{C}P^2$）のことを実（or 複素）射影平面という.

---

§14 埋蔵写像・同相写像

14-1. 同相な空間•••$(X_1, \mathcal{O}_1)$ と $(X_2, \mathcal{O}_2)$ を 2 つの位相空間とする. 全単射連続写像 $f : X_1 \to X_2$ が、f^{-1} も連続であるとき、f は同相写像であるという. もし、X_1, X_2 に対して同相写像が存在するとき、X_1, X_2 は同相 (位相同型) であるという. 位相空間において、同相を同値とみなしたものを同相類という.

14-2. 埋蔵写像（埋め込み写像） ••• 単射連続写像 $f : X \to Y$ のうち、Y の部分空間 $f(X) \subset Y$ において、$f : X \to f(X)$ が同相写像となるものをいう.

14-3. 位相不変量 ••• 同相類上で変わらない位相空間の量のことをいう.

14-4. 位相的性質 ••• 同相写像で変わらない性質のことをいう.

---

§15 積空間

15-1. 積位相 (2 つの空間の積) • • • 位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ と $(X_2, \mathcal{O}_2)$ に対して、自然な射影を $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ とする. このとき、

$$\{p_1^{-1}(H_1) | H_1 \in \mathcal{O}_2\} \cup \{p_2^{-1}(H_2) | H_2 \in \mathcal{O}_2\}$$

によって生成される位相を $X_1 \times X_2$ 上の積位相といい、$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ とかく.

15-2. 積位相 (任意個の空間の積) ••• $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ を位相空間とする．直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ において、射影を $p_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ とする.

$$\cup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(H_\lambda) | H_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

によって生成される位相を $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 上の積位相といい、$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ もしくは、※$_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ と表す.

位相空間 X の可算個の積空間を $X^{\aleph_0}$ とかく.

15-3. 積空間が第一可算 (第二可算、可分) であるための必要十分条件 ••• Λ を可算集合とする．積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が第一可算（第二可算、及び可分）であるためには任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して X_λ が第一可算（第二可算、及び可分）であることが必要十分である.

---

§16 連結性

16-1. 連結 ••• 位相空間 X に対して、ある 2 つの空ではない互いに素な開集合 U, V を使って、$X = U \cup V$ とならないことである．連結でない位相空間は不連結という.

16-2. 弧状連結 ••• 位相空間 X において、$A \subset X$ が弧状連結であるとは、任意の $a, b \in A$ に対して連続写像 $f : I \to A$ の像として、$f(0) = a$ かつ $f(1) = b$ となるものが存在すること.

16-3. 連結成分 ••• 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ のうち、x を含む最大の連結部分集合 $C(x)$ を連結成分という.

16-4. 完全不連結 ••• 任意の点 $x \in X$ において、x を含む連結成分が x のみからなるもの.

16-5. 局所連結 ••• X を位相空間とし、任意の $x \in X$ と、任意の近傍 $x \in U$ に対して、ある x の連結近傍 V で $V \subset U$ となるものが存在すること.

16-6. 局所弧状連結 ••• X を位相空間とし、任意の $x \in X$ と、x の任意の近傍 U に対して、ある x の弧状連結近傍 V で $V \subset U$ となるものが存在すること.

16-7. 弧連結 ••• 位相空間 X の任意の点 $p, q \in X$ が $[0,1]$ から X への埋め込み（i.e.$[0,1] \cong f([0,1])$ 同相）として繋げる $(f(0) = p, f(1) = q)$ ときに、X は弧連結という.

---

§17 分離公理

17-1. 分離可能 ••• 空間の互いに素な 2 つの部分集合 A, B がそれらをそれぞれ覆い、かつ互いに交わらない 2 つの開集合がとれるとき、その交わらない 2 つの部分集合は開集合で**分離可能**という．つまり、ある互いに素な開集合 U, V が存在して、$A \subset U$ かつ $B \subset V$ となる.

空間の部分集合がどのように分離可能であるか以下のような分離公理がある.

17-2. 分離公理 (separation axioms) ••• 分離公理 T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 は以下のように定義される.

T_0　相異なる $p, q \in X$ に対して、ある開集合 U があって $p \in U \not\ni q$ もしくは $p \notin U \ni q$ がなりたつ.

T_1　相異なる $p, q \in X$ に対して、ある開集合 U, V があって $p \in U \not\ni q$ かつ $p \notin V \ni q$ がなりたつ.

T_2　相異なる $p, q \in X$ が開集合で分離可能.（ハウスドルフ）

T_3　任意の閉集合とそれに属さない任意の点が開集合で分離可能.（T_3 空間）

T_4　任意の交わらない 2 つの閉集合が開集合で分離可能.（T_4 空間）

T_1 かつ T_3 空間を**正則空間**という. T_1 かつ T_4 空間を**正規空間**という.

17-3. 連続関数で分離可能 ••• 部分集合 $A, B \subset X$ が連続関数で分離可能とは、その 2 つの部分集合に対してある連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ があって、$f(A) = \{0\}$ であり、$f(B) = \{1\}$ となることをいう.

17-4. 分離公理 2 •••　その他の分離公理についてここで記す.

$T_{2\frac{1}{2}}$	相異なる 2 点が閉近傍で分離可能. (ウリゾーン空間)
完全 T_2	相異なる 2 点が連続関数で分離可能. (完全ハウスドルフ)
$T_{3\frac{1}{2}}$	連続関数で任意の点と任意の閉集合が分離できる. (完全正則空間（チコノフ空間))
T_5	全ての部分集合が正規空間となる正規空間. もしくは separated な集合が開集合で分離可能 (全部分正規空間（completely regular 遺伝的正規）)
完全 T_4	任意の閉集合 F に対して連続写像 $f : X \to I$ が存在して、$F = f^{-1}(0)$ となる. もしくは任意の閉集合が G_δ 集合. (完全正規空間 (perfectly normal))

---

§18 コンパクト性

18-1. コンパクト ••• 位相空間 X の任意の開被覆が有限の部分被覆をもつときをいう.

18-2. 連続体 ••• 連結な、コンパクト距離空間のことを連続体という.

連続体は現在も活発に研究されている位相幾何学の一分野である.（t 筑波大学にも連続体の研究者はいます.）

`http://web.mst.edu/~continua/`

に未解決問題が載っているので考えてみると面白いかもしれない.

18-3. ペアノ連続体 ••• 連結かつ局所連結な、コンパクト距離空間のことをペアノ連続体という.

18-4. Hahn-Mazurkiewicz の定理 ••• 距離化可能空間が X ペアノ連続体であることと、I からの連続な全射が存在することは同値である.

18-5. 有限交叉性 ••• X の部分集合族 A がそのどの有限集合の共通部分が空にならないとき、A は有限交叉性をもつとい う.

18-6. フィルター ••• 位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ で以下を満たすものをフィルターという.

(i) $U \in \mathcal{F}$ が $U \subset K$ となる場合は、$K \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}$ の有限個の共通部分も $\mathcal{F}$ の元である.

(iii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

フィルター $\mathcal{F}$ を含むフィルターが $\mathcal{F}$ しかないとき、$\mathcal{F}$ はウルトラフィルターという.

18-7. ハウスドルフコンパクト化 ··· 位相空間 X に対して、X を稠密な部分集合として含むようなコンパクトな位相空間 Y が存在するとき、Y を X の**コンパクト化**という．また、X がハウスドルフであり、Y もハウスドルフであるとき、Y を X のハウスドルフコンパクト化という．

18-8. 一点コンパクト化 ··· X を非コンパクトかつ局所コンパクトハウスドルフ空間とする．位相空間 αX を以下のようにして定義する．X に含まれない点 p として、$X \cup \{p\}$ を集合とし、αX の開集合 U を X の開集合もしくは $\alpha X \setminus U \subset X$ が X でコンパクトとなるものとして定義する．このような位相空間 αX を X の一点コンパクト化という．

18-9. リンデレーフ ··· 任意の開被覆が可算個の部分被覆をもつ．

18-10. 局所有限 ··· 部分集合族 $\mathcal{M}$ が局所有限とは以下を満たすこと．任意の x に対して、ある近傍 $U(x)$ が存在して、$U(x) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ となる $\mathcal{M}$ の元は有限個であること．

18-11. 細分 ··· 被覆 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ が、任意の $S \in \mathcal{S}$ がある $T \in \mathcal{T}$ が存在して、$S \subset T$ となること．

18-12. パラコンパクト ··· 任意の開被覆が局所有限な開細分を持つこと．

---

§19 完備距離空間・全有界

19-1. 完備距離空間 ··· 距離空間 X の任意の基本列（コーシー列）が X の点に収束するとき X は完備距離空間という．

19-2. 縮小写像 ··· 距離空間 (X, d) として、写像 $f : X \to X$ に対してある実数 $0 < c < 1$ が存在して、任意の $x, y \in X$ が $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ を満たすとき f を縮小写像という．
19-3. 全有界 ··· 距離空間 (X, d) に対して、任意の正の数 ϵ に対して、X の有限個の点を選んで、$X = B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$ となるとき (X, d) は全有界という．

19-4. バナッハ空間 ··· ノルム（$||\cdot||$）が与えられている線形空間をノルム空間という．また、この $||\cdot||$ が与える距離が距離空間として完備であるとき、このノルム空間をバナッハ空間という．

19-5. 一様連続写像 ··· 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対して、ある実数 $\delta > 0$ があり、$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ がなりたつ．

19-6. 等距離同相写像 ··· 距離空間の間の写像 $f : (X, d) \to (X', d')$ が全射かつ任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ となるとき f を等距離同相写像という．

19-7. 距離空間の完備化 ··· 距離空間 (X, d) を稠密集合として含む完備距離空間 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ で、$\tilde{d}$ が d の拡張となっているものを (X, d) の完備化という．

---

§20 ベール空間・写像空間

20-1. 疎な集合 ··· X を位相空間とする．X の部分集合 A が $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \emptyset$ であるとき、A は位相空間 X の中で疎な集合という．つまり内点を持たない集合のことである．
第一類 疎な集合の可算個の和集合を第一類という．
第二類 第一類でない集合．
ベール集合 可算個の稠密な開集合の共通部分が稠密になるような位相空間．

20-2. コンパクト開位相 ··· 位相空間 X から位相空間 Y への連続写像全体の集合を $C(X, Y)$ とおく．$A \subset X$ をコンパクト集合とし、$B \subset Y$ を開集合とする．このとき、$W(A, B) = \{f \in C(C, Y) | f(A) \subset B\}$ とおいて、$\{W(A, B) | A \subset X :$ コンパクト$, B \subset Y :$ 開集合$\}$ によって生成される位相を $C(X, Y)$ 上のコンパクト開位相という．

参考文献

集合と位相空間（森田茂之）朝倉書店
集合と位相（内田伏一）裳華房.
位相空間の基礎概念（酒井克郎）Web で検索のこと.
位相空間論（森田紀一）絶版なので図書館にて探すこと.
Counterexamples in topology(Lynn Arthur Steen and J.Arthur Seebach Jr.)Dover.
トポロジーへの招待（寺澤順）日本評論社

Homepage：
Webpage of Motoo Tange (`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/top.html`)
Twitter：
BasicMathIIB (`https://twitter.com/BasicMathIIB`)
Blog：
Motoo Tange's blog (`http://motochans.blogspot.jp`)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.