トポロジー入門演習

補足スライド no. 1

丹下　基生

2016/10/29

$d(x, A) = 0$ であることと $x \in \bar{A}$ であることの同値性

以下の問題を考えましょう．

問題

X を距離空間とし、A を部分集合とする．ある点 $x \in X$ が $d(x, A) = 0$ であることと、$x \in \bar{A}$ であることは同値である．

$d(x,A)=0$ であることと $x\in\bar{A}$ であることの同値性

以下の問題を考えましょう．

問題

X を距離空間とし、A を部分集合とする．ある点 $x\in X$ が $d(x,A)=0$ であることと、$x\in\bar{A}$ であることは同値である．

証明の前に、定義のおさらいです．$d(x,A)$ は、

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a)|a\in A\}$$

と定義されます．

$d(x, A) = 0$ であることと $x \in \bar{A}$ であることの同値性

以下の問題を考えましょう．

問題

X を距離空間とし、A を部分集合とする．ある点 $x \in X$ が $d(x, A) = 0$ であることと、$x \in \bar{A}$ であることは同値である．

証明の前に、定義のおさらいです．$d(x, A)$ は、

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

と定義されます．inf は、最小値とは違います．

$d(x, A) = 0$ であることと $x \in \bar{A}$ であることの同値性

以下の問題を考えましょう．

問題

X を距離空間とし、A を部分集合とする．ある点 $x \in X$ が $d(x, A) = 0$ であることと、$x \in \bar{A}$ であることは同値である．

証明の前に、定義のおさらいです．$d(x, A)$ は、

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

と定義されます．inf は、最小値とは違います．一般に、$\inf(Z)$ は Z の下界の最大値です．つまり、$\inf(Z)$ は、下界の条件

$d(x, A) = 0$ であることと $x \in \bar{A}$ であることの同値性

以下の問題を考えましょう．

問題

X を距離空間とし、A を部分集合とする．ある点 $x \in X$ が $d(x, A) = 0$ であることと、$x \in \bar{A}$ であることは同値である．

証明の前に、定義のおさらいです．$d(x, A)$ は、

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

と定義されます．inf は、最小値とは違います．一般に、$\inf(Z)$ は Z の下界の最大値です．つまり、$\inf(Z)$ は、下界の条件
任意の $z \in Z$ において、$y \leq z$ となる

$d(x,A)=0$ であることと $x \in \bar{A}$ であることの同値性

以下の問題を考えましょう．

問題

X を距離空間とし、A を部分集合とする．ある点 $x \in X$ が $d(x,A)=0$ であることと、$x \in \bar{A}$ であることは同値である．

証明の前に、定義のおさらいです．$d(x,A)$ は、

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a)|a \in A\}$$

と定義されます．inf は、最小値とは違います．一般に、$\inf(Z)$ は Z の下界の最大値です．つまり、$\inf(Z)$ は、下界の条件 任意の $z \in Z$ において、$y \leq z$ となる ような y のうちで最大のものです．

$$\inf(Z)=\max\{y \in \mathbb{R}|y \leq z,\ \forall z \in Z\}$$

よって、max より少しでも大きい値 w を任意に $\inf(Z) < w$ を取ったとすると、w は下界ではないので、上の下線が否定されて、

よって、$\max$ より少しでも大きい値 w を任意に $\inf(Z) < w$ を取ったとすると、w は下界ではないので、上の下線が否定されて、

ある $z \in Z$ が存在して、$z < w$ となる.

よって、$\max$ より少しでも大きい値 w を任意に $\inf(Z) < w$ を取ったとすると、w は下界ではないので、上の下線が否定されて、

ある $z \in Z$ が存在して、$z < w$ となる．

$d(x, A)$ の値は、$d(x, A)$ より少しでも大きい値より小さく $d(x, A)$ 以上の値 $d(x, a)$ $(a \in A)$ が取れる、つまり、

よって、max より少しでも大きい値 w を任意に $\inf(Z) < w$ を取ったとすると、w は下界ではないので、上の下線が否定されて、

ある $z \in Z$ が存在して、$z < w$ となる．

$d(x, A)$ の値は、$d(x, A)$ より少しでも大きい値より小さく $d(x, A)$ 以上の値 $d(x, a)$ $(a \in A)$ が取れる、つまり、

$d(x, A)$

任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $a \in A$ が存在して、$d(x, A) \leq d(x, a) < d(x, A) + \epsilon$ となる．

$\bar{A}$ は触点 (もしくは閉包 $\mathrm{Cl}(A)$) です．触点は、A と A の集積点の和集合のことをいいます．A の集積点全体のことを導点と言います．導点は、A^d と書いたりすることがあります．
d は derived(引き出された)、Cl は closure(閉包) から来ています．

$\bar{A}$ は触点 (もしくは閉包 $\mathrm{Cl}(A)$) です．触点は、A と A の集積点の和集合のことをいいます．A の集積点全体のことを導点と言います．導点は、A^d と書いたりすることがあります．
d は derived(引き出された)、Cl は closure(閉包) から来ています．

x が A の触点であることは以下のようになります．

$\bar{A}$ は触点 (もしくは閉包 $\mathrm{Cl}(A)$) です．触点は、A と A の集積点の和集合のことをいいます．A の集積点全体のことを導点と言います．導点は、A^d と書いたりすることがあります．
d は derived(引き出された)、Cl は closure(閉包) から来ています．

x が A の触点であることは以下のようになります．

$x \in X$ が A の触点である

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ を満たす．

$\bar{A}$ は触点 (もしくは閉包 $\mathrm{Cl}(A)$) です．触点は、A と A の集積点の和集合のことをいいます．A の集積点全体のことを導点と言います．導点は、A^d と書いたりすることがあります．
d は derived(引き出された)、Cl は closure(閉包) から来ています．

x が A の触点であることは以下のようになります．

$x \in X$ が A の触点である

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ を満たす．

また、触点のうち、x が集積点であることは x の周りに、x にいくらでも近い x 以外の A の点が存在するもので、定義すると以下のようになります．

$\bar{A}$ は触点 (もしくは閉包 $\mathrm{Cl}(A)$) です．触点は、A と A の集積点の和集合のことをいいます．A の集積点全体のことを導点と言います．導点は、A^d と書いたりすることがあります．
d は derived(引き出された)、Cl は closure(閉包) から来ています．

x が A の触点であることは以下のようになります．

$x \in X$ が A の触点である

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ を満たす．

また、触点のうち、x が集積点であることは x の周りに、x にいくらでも近い x 以外の A の点が存在するもので、定義すると以下のようになります．

$x \in X$ が A の集積点である

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$(B_\epsilon(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ を満たす．

$\bar{A}$ は触点 (もしくは閉包 $\mathrm{Cl}(A)$) です．触点は、A と A の集積点の和集合のことをいいます．A の集積点全体のことを導点と言います．導点は、A^d と書いたりすることがあります．
d は derived(引き出された)、Cl は closure(閉包) から来ています．

x が A の触点であることは以下のようになります．

$x \in X$ が A の触点である

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ を満たす．

また、触点のうち、x が集積点であることは x の周りに、x にいくらでも近い x 以外の A の点が存在するもので、定義すると以下のようになります．

$x \in X$ が A の集積点である

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$(B_\epsilon(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ を満たす．

ここで、いよいよ証明開始です．

(証明)

$x \in X$ を、$d(x, A) = 0$ となる点とします.

(証明)
$x \in X$ を、$d(x, A) = 0$ となる点とします.

$d(x, A)$ の定義から、任意の $\epsilon > 0$ に対して、
$0 = d(x, A) \leq d(x, a) < \epsilon$ となる $a \in A$ が存在する.

(証明)
$x \in X$ **を、** $d(x, A) = 0$ **となる点とします.**

$d(x, A)$ **の定義から、任意の** $\epsilon > 0$ **に対して、**
$0 = d(x, A) \leq d(x, a) < \epsilon$ **となる** $a \in A$ **が存在する.**

よって、 $a \in B_\epsilon(x) \cap A$ **より、** $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ **となる. よって、**
$x \in \bar{A}$ **となる.**

逆に、$x \in \bar{A}$ とする.

逆に、$x \in \bar{A}$ とする.

触点の定義から、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ となる.

逆に、$x \in \bar{A}$ とする.

触点の定義から、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ となる.

そのような元を a_ϵ とすると、任意の $\epsilon > 0$ に対して、
$0 \leq d(x, a_\epsilon) < \epsilon$ となる a_ϵ が存在する.

逆に、$x \in \bar{A}$ **とする．**

触点の定義から、任意の $\epsilon > 0$ **に対して、**$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ **となる．**

そのような元を a_ϵ **とすると、任意の** $\epsilon > 0$ **に対して、**
$0 \leq d(x, a_\epsilon) < \epsilon$ **となる** a_ϵ **が存在する．**

$d(x, A)$ **の定義から、**$d(x, A) = 0$ **となる．** $\square$