トポロジー入門演習

補足スライド no. 2

丹下　基生

2016/11/2

内部の２つの定義の同値性

X を距離空間とします．$A \subset X$ を部分集合とします．A の内部には、２つの定義があります．同じ議論を使って一般の位相空間で成り立ちます．

内部の２つの定義の同値性

X を距離空間とします．$A \subset X$ を部分集合とします．A の内部には、２つの定義があります．同じ議論を使って一般の位相空間で成り立ちます．

内部の定義は２つあります．同じことを言っています．このスライドではそれを示してみます．

内部の２つの定義の同値性

X を距離空間とします．$A \subset X$ を部分集合とします．A の内部には、２つの定義があります．同じ議論を使って一般の位相空間で成り立ちます．

内部の定義は２つあります．同じことを言っています．このスライドではそれを示してみます．

問題

次の集合は同じ集合である．

- A に含まれる最大の開集合．
- $U_\epsilon(x) \subset A$ となる $\epsilon > 0$ が存在するような x 全体．

内部の２つの定義の同値性

X を距離空間とします．$A \subset X$ を部分集合とします．A の内部には、２つの定義があります．同じ議論を使って一般の位相空間で成り立ちます．

内部の定義は２つあります．同じことを言っています．このスライドではそれを示してみます．

問題

次の集合は同じ集合である．

- A に含まれる最大の開集合．
- $U_\epsilon(x) \subset A$ となる $\epsilon > 0$ が存在するような x 全体．

A に含まれる最大の開集合を A^i、

内部の２つの定義の同値性

X を距離空間とします．$A \subset X$ を部分集合とします．A の内部には、２つの定義があります．同じ議論を使って一般の位相空間で成り立ちます．

内部の定義は２つあります．同じことを言っています．このスライドではそれを示してみます．

問題

次の集合は同じ集合である．

- A に含まれる最大の開集合．
- $U_\epsilon(x) \subset A$ となる $\epsilon > 0$ が存在するような x 全体．

A に含まれる最大の開集合を A^i、

$U_\epsilon(x) \subset A$ となる $\epsilon > 0$ が存在するような x 全体を A° とする．

問題は、$A^i = A^\circ$ であることを示す.

問題は、$A^i = A^\circ$ であることを示す.

証明の前に、最大の開集合の意味は以下のとおりです.

問題は、$A^i = A^\circ$ であることを示す．

証明の前に、最大の開集合の意味は以下のとおりです．

「U を任意の A^i に含まれる開集合とすると、$U \subset A^i$ となる」

問題は、$A^i = A^\circ$ であることを示す.

証明の前に、最大の開集合の意味は以下のとおりです.

「U を任意の A^i に含まれる開集合とすると、$U \subset A^i$ となる」

という意味です.

最大の名の通り、そのような開集合は次のようにただ一つ決めることができます.

最大の名の通り、そのような開集合は次のようにただ一つ決めることができます.

$$A^\circ = \bigcup_{U \subset A:\text{開集合}} U$$

です.

最大の名の通り、そのような開集合は次のようにただ一つ決めることができます.

$$A^\circ = \bigcup_{U \subset A:\text{開集合}} U$$

です.

最大が取れるということは、開集合の任意個の和が再び開集合であるので、A° も開集合となります.

最大の名の通り、そのような開集合は次のようにただ一つ決めることができます.

$$A^\circ = \bigcup_{U \subset A:\text{開集合}} U$$

です.

最大が取れるということは、開集合の任意個の和が再び開集合であるので、A° も開集合となります.

それでは同値性の証明を始めます.

(証明)

$x \in A^i$ とします.

(証明)
$x \in A^i$ とします.

A^i は開集合なので、$x \in A^i$ に対してある $\epsilon > 0$ に対して.
$U_\epsilon(x) \subset A^i$ となるので、$x \in A^\circ$ となる.

(証明)
$x \in A^i$ **とします.**

A^i **は開集合なので、** $x \in A^i$ **に対してある** $\epsilon > 0$ **に対して.**
$U_\epsilon(x) \subset A^i$ **となるので、** $x \in A^\circ$ **となる.**

よって、 $A^i \subset A^\circ$ **.**

(証明)
$x \in A^i$ とします．

A^i は開集合なので、$x \in A^i$ に対してある $\epsilon > 0$ に対して．
$U_\epsilon(x) \subset A^i$ となるので、$x \in A^\circ$ となる．

よって、$A^i \subset A^\circ$ ．

一方、$x \in A^\circ$ とすると、条件から、ある $\epsilon > 0$ に対して、
$x \in U_\epsilon(x) \subset A$ を満たす．

(証明)
$x \in A^i$ とします.

A^i は開集合なので、$x \in A^i$ に対してある $\epsilon > 0$ に対して.
$U_\epsilon(x) \subset A^i$ となるので、$x \in A^\circ$ となる.

よって、$A^i \subset A^\circ$.

一方、$x \in A^\circ$ とすると、条件から、ある $\epsilon > 0$ に対して、
$x \in U_\epsilon(x) \subset A$ を満たす.

$U_\epsilon(x)$ は A に含まれる開集合なので、$U_\epsilon(x) \subset A^i$ となる.

(証明)
$x \in A^i$ とします.

A^i は開集合なので、$x \in A^i$ に対してある $\epsilon > 0$ に対して.
$U_\epsilon(x) \subset A^i$ となるので、$x \in A^\circ$ となる.

よって、$A^i \subset A^\circ$.

一方、$x \in A^\circ$ とすると、条件から、ある $\epsilon > 0$ に対して、
$x \in U_\epsilon(x) \subset A$ を満たす.

$U_\epsilon(x)$ は A に含まれる開集合なので、$U_\epsilon(x) \subset A^i$ となる.

特に、$x \in A^i$ となる. よって、$A^\circ \subset A^i$.

(証明)
$x \in A^i$ とします.

A^i は開集合なので、$x \in A^i$ に対してある $\epsilon > 0$ に対して.
$U_\epsilon(x) \subset A^i$ となるので、$x \in A^\circ$ となる.

よって、$A^i \subset A^\circ$.

一方、$x \in A^\circ$ とすると、条件から、ある $\epsilon > 0$ に対して、
$x \in U_\epsilon(x) \subset A$ を満たす.

$U_\epsilon(x)$ は A に含まれる開集合なので、$U_\epsilon(x) \subset A^i$ となる.

特に、$x \in A^i$ となる. よって、$A^\circ \subset A^i$.

$A^i = A^\circ$ が成り立つ.

次の類題を与えておきます．

類題 (閉包の 2 つの同値な定義)

次の集合は同じ集合である．

- A に含まれる最小の閉集合．
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して、$U_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ となるような x 全体．

次の類題を与えておきます．

類題 (閉包の 2 つの同値な定義)

次の集合は同じ集合である．

- A に含まれる最小の閉集合．
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して、$U_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ となるような x 全体．

同じように証明してみてください．