

トポロジー入門演習

補足スライド no. 1

丹下 基生

2016/10/29

$d(x, A) = 0$ であることと $x \in \bar{A}$ であることの同値性

以下の問題を考えましょう。

問題

X を距離空間とし、 A を部分集合とする。ある点 $x \in X$ が $d(x, A) = 0$ であることと、 $x \in \bar{A}$ であることは同値である。

証明の前に、定義のおさらいです。 $d(x, A)$ は、

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

と定義されます。 \inf は、最小値とは違います。一般に、 $\inf(Z)$ は Z の下界の最大値です。つまり、 $\inf(Z)$ は、下界の条件 任意の $z \in Z$ において、 $y \leq z$ となるような y のうちで最大のも のです。

$$\inf(Z) = \max\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq z, \forall z \in Z\}$$

よって、 \max より少しでも大きい値 w を任意に $\inf(Z) < w$ を取ったとすると、 w は下界ではないので、上の下線が否定されて、

ある $z \in Z$ が存在して、 $z < w$ となる。

$d(x, A)$ の値は、 $d(x, A)$ より少しでも大きい値より小さく $d(x, A)$ 以上の値 $d(x, a)$ ($a \in A$) が取れる、つまり、

$d(x, A)$

任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $a \in A$ が存在して、
 $d(x, A) \leq d(x, a) < d(x, A) + \epsilon$ となる。

\bar{A} は触点 (もしくは閉包 $\text{Cl}(A)$) です。触点は、 A と A の集積点の和集合のことをいいます。 A の集積点全体のことを導点と言います。導点は、 A^d と書いたりすることがあります。

d は derived(引き出された)、 Cl は closure(閉包) から来ています。

x が A の触点であることは以下ようになります。

$x \in X$ が A の触点である

任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ を満たす。

また、触点のうち、 x が集積点であることは x の周りに、 x にくらでも近い x 以外の A の点が存在するもので、定義すると以下ようになります。

$x \in X$ が A の集積点である

任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $(B_\epsilon(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ を満たす。

ここで、いよいよ証明開始です。

(証明)

$x \in X$ を、 $d(x, A) = 0$ となる点とします .

$d(x, A)$ の定義から、任意の $\epsilon > 0$ に対して、
 $0 = d(x, A) \leq d(x, a) < \epsilon$ となる $a \in A$ が存在する .

よって、 $a \in B_\epsilon(x) \cap A$ より、 $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ となる . よって、
 $x \in \bar{A}$ となる .

逆に、 $x \in \bar{A}$ とする .

触点の定義から、任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ となる .

そのような元を a_ϵ とすると、任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $0 \leq d(x, a_\epsilon) < \epsilon$ となる a_ϵ が存在する .

$d(x, A)$ の定義から、 $d(x, A) = 0$ となる .

□