トポロジー入門演習第１回 ('17 年 10 月 2 日)

説明 1-1. (集合の例)

1. $\mathbb{R}$ は実数全体を集めた集合である。そのほか、$\mathbb{Z}$ は整数全体を集めた集合である。$\mathbb{R}^2$ は、$\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ のように 2 つの実数のペアを集めた集合である。
2. $B(x,\epsilon)=\{y\in X|d(x,y)<\epsilon\}$ は X 上の ϵ-近傍という。これは、X の中の部分集合である。
3. ϵ-近傍は、"境界"(本当は定義が必要だが...) は含むか？含まないか？
4. 集合 A,B が同じ集合であるということは、$A\subset B$ かつ $B\subset A$ を意味する。
5. 線形空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$ と $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}|2x-y=0\right\}$ が同じ集合であることをお互いが片方に包まれることを示すことによって証明せよ。

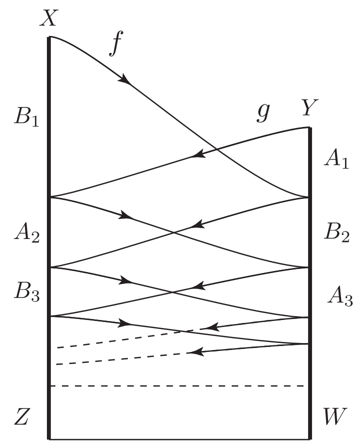
説明 1-2. (ベルンシュタインの定理)
集合 A, B に対して、単射 $X \to Y$ と $Y \to X$ が存在したとすると、全単射 $A \to B$ が存在する。

(証明) 単射をそれぞれ、$f: X \to Y$ と $g: Y \to X$ とおく。どちらか一方が全射であれば、既に全単射が構成されているので $X \approx Y$ である。(X, Y の間に全単射がある場合、$X \approx Y$ と書く。)

ゆえに、どちらも全射でないと仮定してよい。$A_1 = Y \setminus f(X)$ とおく。A_1 は g によって、X に単射に写されるはずだから、それを、A_2 と書く。A_2 の f による像を A_3 と書く。帰納的に、$A_{2n+1} = f(A_{2n})$、$A_{2n} = g(A_{2n-1})$ とする。また、同じ様に、$B_1 = X \setminus g(Y)$ とし、$B_{2n} = f(B_{2n-1})$、$B_{2n+1} = g(B_{2n})$ と定義する。X, Y, A_n, B_n は模式的に下図のように書き表される。また、Z, W を以下のように定義をする。

$$Z = X \setminus \sqcup_{n=1}^{\infty}(A_{2n} \cup B_{2n-1}), W = Y \setminus \sqcup_{n=1}^{\infty}(A_{2n-1} \cup B_{2n})$$

X, Y はそれぞれの集合に共通部分はなく、以下のように分解できる。



$$X = Z \sqcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n} \sqcup B_{2n-1}),\ Y = W \sqcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1} \sqcup B_{2n})$$

集合 A_n はすべて対等であり、B_n もすべて対等であるので、全単射 $A_{2n} \to A_{2n-1}$ と $B_{2n-1} \to B_{2n}$ を用いれば、Z, W 以外の部分には全単射が作れた。最後に $Z \approx W$ であることを示せばよい。
(この部分を証明せよ。)

説明 1-3. ($\epsilon - \delta$ 論法)

1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x = a$ で連続であるとは、以下のように定義される。

   定義 1 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、

   $$|x - a| < \delta \text{なる任意の } x \text{ に対して} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{が成り立つ。}$$

2. **(ポイント1)** $|x - a| < \delta$ であることは、$a - \delta < x < a + \delta$ と同値であることを認識しよう。

   (ポイント2) [適当に..... の部分を埋めながら説明せよ。]
   $b = f(a)$ としよう。
   どんなに........ を小さくしても、b を含む区間の中に、a を含むちいさな......
   の幅の区間の像が入る。
   (グラフなどを用いて説明せよ。)

3. 例として、$y = 2x$ が連続であることを説明せよ。

説明 1-4. (距離空間と距離関数)

1. (X, d) が距離空間であることの定義は以下を全て満たすことである。
   - d は距離関数であり、$d : X \times X \to \mathbb{R}$ となる関数である。
   - $d(x, y) \geq 0$ かつ、$d(x, y) = 0$ なら $x = y$ である。
   - $d(x, y) = d(y, x)$
   - $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ を満たす。
2. 距離空間の例として、$\mathbb{R}^2$ 上のユークリッド距離がある。通常の距離 (ピタゴラスの定理の意味) として、距離関数 d はどのように定義するか？
3. $A \subset \mathbb{R}$ を部分集合とする。

   (1) $\forall a \in A, a \leq x$ となる x を A の**上界**という。

   (2) $\forall a \in A, x \leq a$ となる x を A の**下界**という。

   上界、下界は存在するとは限らない。存在しないような A の例を説明せよ。
4. 上界 (および下界) が存在するとき、そのような最小値 (および最大値) が存在する。それを、A の**上限** (および**下限**) という。
5. $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ を以下のようにして証明せよ。
   (証明)
   $\forall z \in A$ に対して、$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
   (この不等式は何を使ったか？)
   $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, z)$ $(\forall z \in A)$ より
   $d(x, A) - d(x, y) \leq \inf\{d(y, z) || z \in A\} = d(y, A)$
   ($d(x, A) - d(x, y)$ **はどのような集合の下界であったのか？)** 残りの部分は自力で証明せよ。