トポロジー入門演習第２回 ('17 年 10 月 10 日)

説明 2-1. (べき集合)
べき集合を定義しよう。

定義 1 (べき集合) X を集合とする。X の部分集合全体からなる集合を X のべき集合といい、$\mathcal{P}(X)$ と表す。

1. べき集合の例を考えよ。
2. 例えば、$X = \{0, 1, 2\}$ となる集合の場合、$\mathcal{P}(X)$ はどのような集合となるか？説明せよ。
3. $X = \mathbb{N}$ のとき、$\mathcal{P}(X)$ はどのような集合といえるか？
4. $X = \mathbb{N}$ のとき、$\mathcal{P}(X)$ は $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ なる写像全体と一致する。つまり、$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} | f$ は写像 $\}$ である。このことを説明せよ。

説明 2-2. (位相の定義)

1. 以下の定義を的確に説明せよ。

   定義 2 X を集合とする。べき集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ で以下の性質を満たすものを**位相**とよぶ。

   - $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ である。
   - $O_1, O_2, \cdots O_k \in \mathcal{O}$ なら $O_1 \cap O_2 \cdots O_k \in \mathcal{O}$ である。
   - $\mathcal{U} = \{O_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を任意個の $\mathcal{O}$ の集合を元とする集合とする。このとき、$\cup\mathcal{U} := \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ である。

2. 最後の条件の $\mathcal{U}$ は、$\forall\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ であることを説明せよ。

3. $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ としてもこの性質は満たされるか？

説明 2-3. (位相空間の性質)
以下の項目を説明せよ。

1. 集合 X に位相 $\mathcal{O}$ を付随させたもの[1]を、$(X, \mathcal{O})$ と書き、これを位相空間という。
2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が与えられたとき、この $\mathcal{O}$ の元のことを、**開集合**という。
3. つまり、位相空間とは、開集合の定義された空間ということである。
4. $F \subset X$ が $(X, \mathcal{O})$ の閉集合であるとは、$F^c = X \setminus F$ が開集合、つまり、$F^c \in \mathcal{O}$ であることとして定義される。
5. 2 つの位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ と $(X, \mathcal{O}_2)$ が、集合として、$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ であるとき、2 つの位相空間は同値な位相空間であるという。構成の仕方が異なる 2 つの位相空間が最終的に、同値であるとすると、位相的にそれらは区別ができないので同じ位相空間とみなすのである。

[1] X に追加の情報が付加されたという意味である。

説明 2-4. (距離空間と位相空間)
以下を説明せよ。

1. 距離空間 (X, d) があったときに、距離を用いて、何らかの位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ を構築できる[2]。なので、

$$\{\text{距離空間}\} \to \{\text{位相空間}\}$$

のような写像だと考えて良い。このときできる位相空間は、距離を使って得られるものだから、位相空間の中である特定の性質をもつ。そのようにして得られる位相のことを、**距離位相**という。

しかし、この写像の像に入らない位相空間も存在する。つまり、そのような位相空間は、位相として、距離から作られるようなものではない。この内容はもう少し先で出てくる。

2. (1) $\mathcal{O}_d$ は以下の性質を満たす集合 O たちを集めた集合として定義する。

$$\forall x \in O,\ \exists \epsilon > 0, B_d(x, \epsilon) \subset O$$

これはどういうことか？簡単なユークリッド平面上の絵でもよいから説明せよ。

(2) $B_d(x, \epsilon) = \{y | d(x, y) < \epsilon\}$ 自身も距離位相の開集合であることを説明 (正確に言える場合は証明も) せよ。

(3) 異なる距離をもつ距離空間から一般には違う位相空間が作れるが、同じ位相空間をを作れる場合があるか？考えてみよ。

[2] 下に d と書いたのは距離 d に依存して決まる位相だからである。