トポロジー入門演習第3回 ('17年10月16日)

説明 3-1. (内部・閉包・境界・外部)
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。A^c で A の補集合と表す。

1. $A \subset X$ を部分集合とし、A の内部、閉包、境界点、外部の以下の定義をせよ。
   例として、図に簡単に書けるものを使って説明せよ。

   定義 1 (内部) A の内部 A° とは、A に包まれる最大の開集合である。

   定義 2 (閉包) A の閉包 $\bar{A}$ とは、A を包む最小の閉集合である。

   定義 3 (境界) A の境界 A^f とは、$\bar{A} \setminus A^\circ$ である。

   定義 4 (外部) A の外部 A^e とは、A^c の内部のことである。

2. $A = X, \emptyset$ として、その内部、閉包、境界、外部が何かについて証明付きで述べよ。

説明 3-2. (内部・閉包・境界・外部２)
$A \subset X$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合とする。

1. A の内部 A°、閉包 $\bar{A}$ に対して、
$$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$$
であることを認識せよ。
2. $X = A^\circ \sqcup A^f \sqcup A^e$ と分解できることを説明せよ。(互いに交わりはない。)
3. $A^f = \emptyset$ であるとき、A は開集合かつ閉集合であることを示せ。また、逆も成り立つことを示せ。A が開集合かつ、閉集合である部分集合の例を示せ。

説明 3-3. (開集合であることと閉集合であること)

1. A に含まれる最大の開集合 A° が A に一致することと、A が開集合であることは同値であることを説明せよ。
2. F を含む最小の閉集合 $\bar{F}$ が F に一致することと、F が閉集合であることは同値であることを説明せよ。

$\boxed{\textbf{説明 3-4.}}$ (位相空間の内部と閉包)

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし、$A \subset X$ を部分集合とする。

1. A の内部 A^o を、A に含まれる最大の開集合と定義したとき、

$$A^o = \cup\{O \subset X | O\text{:開集合 s.t. } O \subset A\}$$

$$A^o = \{x \in X | \exists U\text{:開集合 s.t.} x \in U \subset A\}$$

   を説明せよ [1]。(集合のイコールの意味を思い出せ。)

2. A の閉包 $\bar{A}$ を、A に含まれる最大の開集合と定義したとき、

$$\bar{A} = \cap\{F \subset X | F\text{:閉集合 s.t.} A \subset F\}$$

$$\bar{A} = \{x \in X | \forall U : \text{開集合かつ } x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset\}$$

   であることを説明せよ [2]。

[1] できるだけ正確に。
[2] できるだけ正確に。