

## トポロジー入門演習第4回 ('17年10月23日)

---

### 説明 4-1. (近傍の定義)

定義 1  $x$  の近傍  $N$  とは、内部に  $x$  を含む開集合を包むことである。

以下を説明せよ。

1. この定義を数学のことばで厳密に定義せよ。
2. 空集合は近傍になりうるか？
3. 空ではない開集合は近傍になりうることを説明せよ。
4. 近傍の例をあげよ。

**説明 4-2.** (近傍の性質 1)

位相空間  $(X, \mathcal{O})$  において以下の事項を説明せよ。

- 密着位相、離散位相の近傍とはどんなものか、説明せよ。
- 近傍として、閉集合をとることもできるが、どんな場合だろうか？
- 近傍  $\mathcal{N}(x)$  の元  $N \in \mathcal{N}(x)$  には、 $x$  にいくらでも近い元が含まれる。これを以下の空間において数学的にどう説明すればよいか。
  1. 距離空間
  2. 位相空間

**説明 4-3.** (有限補集合位相)

$X$  をある無限集合とする。

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid U^c \text{が有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$$

とすると、 $(X, \mathcal{O})$  は位相空間であることを示せ。

**説明 4-4.** (無限個の近い元)

1.  $A$  の集積点を定義せよ。
2.  $A$  の孤立点を定義せよ。
3.  $X = \mathbb{R}^2$  とし、 $\mathcal{O}$  を通常のエウクリッド距離位相とする。 $A \subset X$  とし、 $A^d$  は空集合ではないとする。このとき、 $\forall a \in A^d$  に対して、 $a$  の近くには  $a$  とは異なる無限個の  $A$  の元が存在することを示せ。