

トポロジー入門演習第1回 ('17年10月2日)

(集合と距離空間で遊んでみよう。)

学籍番号

氏名

課題 1-1. (集合の要素と部分集合)

以下の四角にあてはまる \in もしくは、 \subset を入れよ。

1. $35 \square \mathbb{R}$

2. $(\cos \theta, \sin \theta) \square \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$

3. $\mathbb{N} \square \mathbb{R}$

4. $3x + x^2 \square \mathbb{R}[x]$

5. $\{1, 2\} \square \mathbb{N}$

6. $(3n + 1) \square \{(x_n) | x_{n+1} - x_n = 3\}$

7. $\emptyset \square \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

課題 1-2. (ベルンシュタインの定理)

集合 A, B に対して、単射 $A \rightarrow B$ と $B \rightarrow A$ が存在したとすると、全単射 $A \rightarrow B$ が存在する。

1. この定理を用いて、 \mathbb{Q} と \mathbb{N} に全単射が存在することを示せ。具体的に作るのではなく、お互いの集合の間に簡単な単射を構成せよ。
2. \mathbb{Z} と \mathbb{N} の間に全単射を構成せよ。
3. 閉区間 $[0, 1]$ と \mathbb{R} の間に全単射を構成せよ。

学籍番号

氏名

課題 1-3. ($\epsilon - \delta$ 論法の復習)

$y = x^2$ が各点 x で連続であることを示せ。

課題 1-4. (距離空間と距離関数)

以下の問題に答えよ。

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ 上の、 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) に対して、

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

と定めたとき、 (\mathbb{R}^2, d) が X 上の距離空間となることを示せ。

2. d をある距離空間 (X, d) 上の距離関数とする。 $A \subset X$ を任意の部分集合とする。 $d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$ と定めるとき、 $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ を証明せよ。
3. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = d(x, A)$ と定める。このとき、 $f(x)$ は連続であることを示せ。