トポロジー入門演習第２回（'17 年 10 月 10 日)

（位相空間を観察し、自ら触って組み立ててみよう。）

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　班　　　氏名

課題 2-1. (対角線論法)

定義 2-1. (濃度)

集合の濃度とは、集合どうしに、対等 (全単射が存在する) という同値関係を入れたときにできる同値類のことをいう。

また、選択公理を認めれば以下が一般に成り立つ。

定理 2-1.

任意の２つの集合 A, B は、対等でなければ、単射 $A \to B$ が存在するか、単射 $B \to A$ が存在する。(ベルンシュタインの定理からどちらか一方が成り立つ。)

1. 対角線論法により、$\mathbb{R}$ と $\mathbb{N}$ が対等でないことがわかる。同じようにして、$\mathbb{N}$ と $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は濃度が異なることを示せ[1]。

---

[1] $\mathcal{P}(X)$ は X のべき集合

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

課題 2-2. (位相空間)

以下の問題を解け。

1. 位相空間の最初の例として集合 X 上に構築される両極端な位相、**離散位相**と**密着位相**がある。それぞれを調べて定義せよ。
2. ２点集合 $X = \{0, 1\}$ 上の位相 $\mathcal{O}$ はどれほど存在するか？確かめよ。離散位相、密着位相以外の位相が存在するか？
3. ３点集合上に存在する、密着位相、離散位相のどちらでもない位相を１つ構築せよ。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　班　　　氏名

課題 2-3. (距離位相が位相であることの証明)

説明 2-4. では、距離空間 (X, d) から、位相 $\mathcal{O}_d$ を構成したが、本当にこれは位相になっているだろうか？$\mathcal{O}_d$ が以下の性質を満たすことを確認せよ。

1. $\mathcal{O}_d$ には、空集合と X 自身がなぜ含まれているか？
2. $\mathcal{O}_d$ の中から任意に有限個だけ集合を取り出し、その共通集合が再び開集合となるのはなぜか？
3. $\mathcal{O}_d$ の中から任意個の集合を取り出し、その和集合が再び開集合となるのはなぜか？

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

課題 2-4. (距離空間から作られる位相の性質)

以下の問題に答えよ。ただし、開区間とは、$(a,b)=\{x|a<x<b\}$ となる形の実数上の部分集合で、閉区間とは、$[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$ の形の $\mathbb{R}$ 上の部分集合とする。

1. $X=\mathbb{R}^2$ とする。$\forall x\in X$ に対して、$B_d(x,\epsilon)$ が開集合であることを証明せよ。
2. $X=\mathbb{R}^2$ とし、
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$
$$d_M((x_1,x_2),(y_1,y_2))=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$
によって得られる位相空間 $(X,\mathcal{O}_d)$ と $(X,\mathcal{O}_{d_M})$ は同値であることを示せ。
3. 実数直線の部分集合の話として以下の問題を解き、一般に $\mathcal{O}$ の元を開集合と呼ぶ理由を考えよ。(位相の条件の 2 つ目と 3 つ目。)
   (1) １点を共有する無限個の開区間の和集合は再び開区間であることを示せ。
   (2) １点を共有する無限個の閉区間の共通集合は閉区間もしくは１点であることを示せ。
   (3) 無限個の開区間の共通集合が閉区間となる場合があることを示せ。
   (4) 無限個の閉区間の和集合が開区間となる場合があることを示せ。