

トポロジー入門演習第3回 ('17年10月16日)

(内部、閉包、境界、外部とはなんだろうか?)

学籍番号

班 氏名

課題 3-1. (閉集合を用いた位相の定義と開集合であるための必要十分条件)

以下の問題を解け。

1. 部分集合族 \mathcal{C} を以下のように定める。

- $\emptyset, X \in \mathcal{C}$
- $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{C} \Rightarrow F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{C}$
- $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とするとき、 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{C}$ である。

このとき、 $\mathcal{O} = \{O \in \mathcal{P} \mid O^c \in \mathcal{C}\}$ とすると、 \mathcal{O} は X 上の位相になることを示せ。

2. (X, \mathcal{O}) を位相空間とする。以下の同値を示せ。

$$A \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists U \in \mathcal{O} \text{ s.t. } x \in U \subset A$$

課題 3-2. (1点集合について)

以下の問題を解け。

1. $(X = \mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ を通常距離位相とすると、任意の1点集合は閉集合であることを示せ。
2. 上の問題1. を一般距離空間から作られる位相空間の場合に示せ。
3. $(X = \mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ を通常距離位相とすると、任意の1点集合の内部、閉包、境界、外部が何か答えよ。
4. (X, \mathcal{O}) が一般離散位相空間の場合、任意の1点集合の内部、閉包、境界、外部が何か答えよ。
5. 1点集合が閉集合とならない位相空間があることを、例をもって示せ。

課題 3-3. (有限集合上の位相と離散位相)

有限集合の位相、また、離散位相について考えよう。

1. 有限集合 S に距離 d が定義できるとする。このとき、 (S, d) から作られる位相空間 (S, \mathcal{O}_d) は離散位相空間となることを示せ。 S を無限集合とすると、違う場合があるか？
2. 位相空間 (X, \mathcal{O}) を考える。このとき、以下を示せ。

\mathcal{O} が離散位相空間であること $\Leftrightarrow \forall x \in X$ に対して、 $\{x\} \in \mathcal{O}$ が成り立つ。

課題 3-4. (平面上の単位円盤)

$X = \mathbb{R}^2$ とし、 d をユークリッド距離とする。

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とする。このとき、 $D^\circ = D$ であり、 $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ であることを示せ。
2. $p = (\cos \theta, \sin \theta)$ とする。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。このとき、 $d(p, D) = 0$ であることを示せ。
3. $p \notin \bar{D}$ であるとする。このとき、 $d(p, D) > 0$ であることを示せ。