トポロジー入門演習第４回 ('17 年 10 月 23 日)

（近傍について考えよう。）

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

課題 4-1. (近傍の性質)

近傍について以下を示せ。

- $\mathbb{R}$ 上の距離位相 $\mathcal{O}_d$ において、$\mathcal{N}(x)$ にはいくらでも直径が小さい近傍が存在することを示せ。
- U が X の開集合であることと $\forall x \in U$ に対して、$U \in \mathcal{N}(x)$ であることは同値であることを示せ。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　班　　　氏名

課題 4-2. (内部、閉包と $\cup$ と $\cap$)
次の等式を示せ。

1. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

また、以下が成り立たない例があるか？もしあれば、それが反例であることを示し、そうでないなら証明を与えよ。

3. $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
4. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

課題 4-3. ($\epsilon - \delta$ 論法と近傍)

$B_d(x;\epsilon) = \{y | d(x,y) < \epsilon\}$ を x での ϵ 近傍という。実数上の実数値関数 $f(x)$ の $x = a$ での連続性は、$\epsilon - \delta$ 論法によって以下のような関係として定義されていた。

$$\forall \epsilon, \exists \delta > 0 (\forall x \in \mathbb{R} (|x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

この命題を ϵ-近傍と集合の記号 $\subset$ を用いてどのように書き換えよ。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

課題 4-4. (集積点・孤立点)

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。$A \subset X$ とする。

1. $\bar{A}$ は A^d と A の孤立点からなることを示せ。
2. $X = \mathbb{R}$ とし、$\mathcal{O}$ を通常のユークリッド距離位相とする。$\mathbb{Q}$ の閉包は $\mathbb{R}$ であることを示せ。
3. 上の問題は、位相を変えると $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ ともなることを示せ。