

トポロジー入門演習第7回 ('17年11月20日)

(位相空間の開集合 \mathcal{O} を開基や準開基から作ってみよう。)

学籍番号

班 氏名

課題 7-1. (開基)

\mathcal{B} が位相空間 (X, \mathcal{O}) の開基であるための下のような必要充分条件がある。これの同値性を証明せよ。

1. $\mathcal{O} = \{\cup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B}\}^1$
2. $\forall O \in \mathcal{O}, \exists \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \text{ s.t. } O = \cup \mathcal{U}$
3. $\forall O \in \mathcal{O}, \forall x \in O, \exists U_x \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in U_x \subset O$

¹ \mathbf{a} を部分集合族のとき、 $\cup \mathbf{a}$ を $\cup\{a \mid a \in \mathbf{a}\}$ のことを意味するので注意せよ。

課題 7-2. (ユークリッド距離位相の場合)

$(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ をユークリッド距離位相とする。このとき、 $\mathcal{B} = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ と取れることを示せ²。また、もっと少なく、 $\mathcal{B}' = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ とすることはできるだろうか？

² (a, b) は開区間 $\{x \mid a < x < b\}$ であることに注意せよ。

課題 7-3. (生成される位相)

X を集合とする。

1. $\mathcal{O}(S)$ をある部分集合 $S \subset \mathcal{P}(X)$ から生成される位相とする。このとき、 S は $\mathcal{O}(S)$ の部分集合か？
2. X 上の離散位相を構成するには、どのような準開基 S をとればよいか？
3. X 上の密着位相を構成するには、どのような準開基 S をとればよいか？
4. \mathbb{R} 上の位相 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ を、開基が $\text{Sor} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ となるものとして定義する。これをゾルゲンフライ直線という。このとき、 \mathcal{O}_S は \mathbb{R} 上の通常の距離位相 \mathcal{O}_d とは異なることを示せ。

課題 7-4. (ゾルゲンフライ直線)

\mathbb{R} 上の通常の位相を \mathcal{O}_d 、ゾルゲンフライ直線の位相を \mathcal{O}_S としよう。

1. 半開区間 $[a, b)$ は $[a, b) \notin \mathcal{O}_d$ であるのはなぜか？
2. $\mathcal{O}_d \subsetneq \mathcal{O}_S$ であることを示せ。
3. \mathcal{O}_S において、 $\forall a \in \mathbb{R}$ での近傍はそれぞれ、どのようなものが考えられるか？