

# トポロジー入門演習第8回 ('17年12月4日)

(相対位相と商位相を理解しよう)

学籍番号

班 氏名

---

## 課題 8-1. (誘導される位相)

連続写像  $f : X \rightarrow Y$  について誘導される位相  $\mathcal{O}_f$  について次を解け。

1. 誘導される位相は位相であることを示せ。
2.  $f : X \rightarrow Y$  から誘導される位相  $\mathcal{O}_f$  は、 $f$  を連続にする  $X$  の最小の位相であることを確かめよ。
3.  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を射影  $(x, y) \mapsto x$  とする。 $p$  によって  $\mathbb{R}$  の通常の距離位相から誘導される  $\mathbb{R}^2$  上の位相はどのような位相か？平面上のユークリッド位相と同じか？

**課題 8-2.** (相対位相)

$(X, \mathcal{O})$  を位相空間とする。

1. 部分集合  $A \subset X$  に与えられる相対位相  $\mathcal{O}|_A$  が位相であることを示せ。
2.  $\mathcal{O}|_A$  は  $\mathcal{O}$  の部分集合でない場合があることを示せ。
3.  $A$  が開集合であるなら、 $\mathcal{O}|_A$  は  $\mathcal{O}$  の部分集合であることを示せ。
4.  $i: A \rightarrow X$  を包含写像とする。  $U \in \mathcal{P}(X)$  とするとき、  $i^{-1}(U) = U \cap A$  を示すことにより、相対位相は  $i$  により誘導される位相であることを証明せよ。

**課題 8-3.** (商位相)

$X$  を集合とする。

1. 商位相が位相であることを示せ。
2. 商写像は連続であることを示せ。
3. 全射かつ開写像であるなら商写像であることを示せ。
4. 全射かつ閉写像であるなら商写像であることを示せ。

**課題 8-4.** (商写像と合成写像)

$X, Y, Z$  を位相空間とする。  $f: X \rightarrow Z, g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$  が、  $f = h \circ g$  を満たすとする。以下を示せ。

1.  $g$  が商写像、  $f$  が連続とするなら、  $h$  は連続である。
2.  $g, h$  が商写像であるなら、  $f$  は商写像である。
3.  $f$  が商写像、  $g, h$  が連続であるなら、  $h$  は商写像である。