

トポロジー入門演習第13回 ('18年1月17日)

説明 13-1. (被覆)

1. 被覆とは何か？定義せよ。
2. 部分被覆とはなにか？例を持って説明せよ。
3. 全ての位相空間は有限被覆を持つことを確認せよ。

説明 13-2. (コンパクト)

1. 閉区間 $[a, b]$ および、开区間 (a, b) の被覆の例をつくれ。
2. コンパクトの定義せよ。

説明 13-3. (\mathbb{R} の部分集合)

\mathbb{R} には通常距離を入れておく。 \mathbb{R} の部分集合を A とする。 f を A 上の連続関数とする。このとき、

- A が閉集合
- A がコンパクト集合

のうちどちらの条件が成り立てば、 f は最大最小を必ずもつか？

説明 13-4. (距離空間のコンパクト集合)

X を距離空間とする。距離空間のコンパクト集合 A は有界閉集合であることを以下のように示そう。

1. $x \in X$ とする。 $\mathcal{U} = \{B_d(x, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は X の被覆、 $\mathcal{U} \cap A = \{B_d(x, n) \cap A \mid n \in \mathbb{N}\}$ は A の被覆になることを確認せよ。
2. A がコンパクト集合であることから、被覆 $\mathcal{U} \cap A$ にどのようなことがいえるか？
3. A が有界であるといえるか？
4. A が閉集合であるということは、 A^c が開集合であることを示せばよい。もしそうでないなら、 $\exists x \in A^c$ に対して、 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $B_d(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ であることになることを確認せよ。
5. 残りの証明を完成させるとどうなるか？