トポロジー入門演習第５回 ('17 年 10 月 30 日)

説明 5-1. (連続性)
$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。

$$f : X \to Y$$

を写像とする。連続性の定義について以下に従って説明せよ。

1. f が連続であるとは、$\forall U \in \mathcal{O}$ に対して、$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ であることを定義せよ。
2. f が $x = a$ で連続であるとは、$\forall V \in \mathcal{N}(f(x))$ に対して、$\exists U \in \mathcal{N}(x)$ が $f(U) \subset V$ であるとして定義せよ。

$\boxed{\textbf{説明 5-2.}}$ (恒等写像の連続性)

$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X 上の位相とする。$i : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ を恒等写像とする。i が連続であるためには、$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ にはどのような包含関係が必要か説明せよ。

説明 5-3. (点列の収束)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ とするとき、任意の自然数 n に対して $x_n \in X$ とする。$x_n \to x$ であることを以下のように定義する。

$\forall U \in \mathcal{N}(x)$ とする、$\exists N \in \mathbb{N}$ に対して、$\forall n \geq N$ に対して $x_n \in U$ となる。

この定義を共有せよ。

説明 5-4. (順序位相)

$(X, \leq)$ を全順序集合とする[1]。このとき、以下の集合 $\mathcal{O}_{\leq}$ は位相空間となる。$\mathcal{O}_{\leq} = \{U \subset X | \forall x \in U \exists a < x < b \in (a, b) \subset U\}$ このとき、a, b は、X の上界の元 ∞ とし、下界の元を $-\infty$ としてもかまわない。なお、$\pm\infty$ とは、X に含まれない元であり、以下の順序を持って、$X \cup \{\pm\infty\}$ が全順序集合となるものである。

- ∞ は、$\forall a \in X$ に対して $a < \infty$ であり、
- $-\infty$ は、$\forall a \in X$ に対して $-\infty < a$ である、

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}_{\leq}$ である。
2. 有限個の $U_1, \cdots U_n \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して、$U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{O}_{\leq}$
3. 任意個の $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に対して、$\cap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_{\leq}$ となること

この位相を順序位相とよぶ。これらのことを証明とともに理解し、班において共有し合う。

[1] (i) $x \leq x$, (ii) $x \leq y \Rightarrow y \leq x$, (iii) $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$ を満たす順序関係を順序集合といい、$\forall x, y (x \leq y \vee y \leq x)$ が成り立つ集合は、全順序集合という。また、$x \leq y$ かつ $x \neq y$ であるとき、$x < y$ とかく。