総合科目 III
閉曲面の分類

担当：丹下 基生

研究室 B715

2/5/2018

目次

問題をきちんとかんがえよう

重要なこと

- 考える対象がはっきりしていること。
- 分類する基準がはっきりしていること。

分類

分類とはなにか

きちんと定義された対象をある基準で全てリストアップすること。

- きちんと定義された $\to$ 集合の言葉で書かれている。
- 基準 $\to$ 何を等しいとするのか？等号関係 (同値関係) が定義されている。

商集合

商集合

ある対象となる集合の全体 $\mathcal{S}$ に同値関係 $\sim$ を導入したとき $\sim$ で結べるものを同じとした集合の全体を $\mathcal{S}/\sim$ と書く。この集合のことを商集合という。

商集合の作り方

- ある幾何的対象 (数学的な条件で書かれる) を全て持ってくる
- $\sim$ 同値関係 (基準) を決める。(合同、相似、位相同型など)

全ての $\mathcal{S}$ を記述するための変数 X を用意する。$A, B \in \mathcal{S}$ とする。$A \sim B$ となるとき、X_A と X_B のうちどちらかを残してどちらかは捨てる。このとき、

$$\{A | A \text{ が対象となる } \}/\sim = \{X_A | A \in \mathcal{S}_0\}$$

となる。

同値でないもの全体がどれほどあるかということ。つまり、$\mathcal{S}/\sim$ は $\mathcal{S}$ の $\sim$ によって同値関係を結んだとき、何種類あるか？ということを指している。

例

$\mathcal{S}$ をある X 小学校全体の児童の集合とする。$\mathcal{S} \ni p, q$ が同じ学年であれば、$p \sim q$ であると定義する。このとき、商集合 $\mathcal{S}/\sim$ は、X に属する児童の学年からなる集合である。例えば、

$$\mathcal{S}/\sim = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

などである。

どうすれば分類したことになるのか？

目標

2 つの対象が同値かどうかを調べるアルゴリズムがある。

- 例えば、できるだけ簡単なもの、例えば、自然数の集合 $\mathbb{N}$ や整数 $\mathbb{Z}$ や、有限集合、実数 $\mathbb{R}$ の集合などよく知っている集合を組み合わせて得られる。
- また、その集合からその性質なども調べられるようになればなおよい。

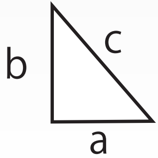
$\sim$ を変えれば、その分類は全くことなるものになる。

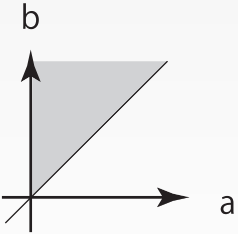
幾何学における分類問題の例

例 1(平面上の直角三角形の合同類はどれほどあるか？)

(対象) $\{(a,b,c)\in(\mathbb{R}_{>0})^3 | a^2+b^2=c^2\}$
(基準)
合同 $\leftrightarrow$ **三辺を決めること。**
$\to$ **一番小さい辺を** a **としておけば、** $a\leq b$ **が決まれば、** c **は一意的に決まる。よって**

$$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | 0<a<b\}$$

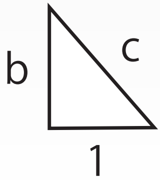



b
a

例 2(平面上の直角三角形の相似類はどれほどあるか？)

(対象) $\{(a,b,c)\in(\mathbb{R}_{>0})^3 | a^2+b^2=c^2\}$
(基準) 相似 $\leftrightarrow$ **三辺の比を決めること。**
$\rightarrow$ **一番小さい辺** $a=1$ **としておく。斜辺でないもう一つの辺** b **は、** $1\le b$ **だから、** $1\le b$ **となる実数を決めれば、** c **が一意的に決まり、相似型が** 1 **つ決まる。**

$$\{b\in\mathbb{R} | 1<b\}$$




b
1

我々の考えるべき対象

対象

Q. **何を考えたいか**

A. “**閉じた**”” **あるなめらかな２次元的対象を全て分類 (リストアップ) したい。**

例：球面とか、ドーナツの表面 (トーラスという) とか.... いったいいくつあるのか？

球面　トーラス　２つのトーラスをつなげたもの

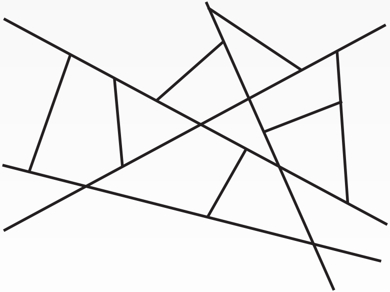
この集合の元を全てリストアップするには、厳密にはどのように議論したらよいのか？

基準

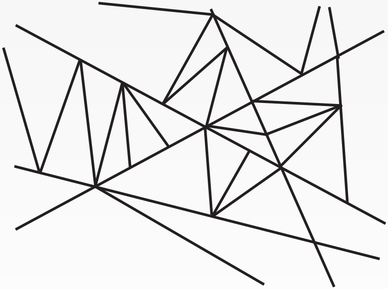
位相同型 ($\cong$) 集合同士の間に一対一な連続写像 (完全なる対応) が存在することをいう。

閉曲面

ここで、2 次元的対象は何にするのか？
2 次元の広がりのもつイメージ ··· 平面は
平面の性質 ··· いくつかの多角形のパッチワークで作られている。



このパッチワークは三角形だけで作られているといっても変わらない。



このように、いくつかの三角形、辺、点を組み合わせてできているものを単体複体という。
(本当はもう少し高次元のものも含めて言う。)

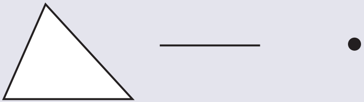
2 次元多面体の定義

Σ が 2 次元多面体とは、

- いくつかの三角形の集合 $\{\Delta_i\}$、
- いくつかの辺の集合 $\{l_j\}$
- いくつかの点の集合 $\{p_k\}$

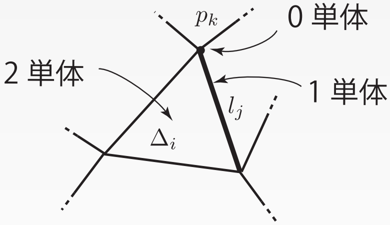
の和集合からなっている集合である。

$$\Sigma = \{\Delta_i\} \cup \{l_j\} \cup \{p_k\}$$



2 単体　1 単体　0 単体

これらの集合がいくつか組み合わさってできたものを多面体という。



X を n-単体。∂X を X にくっついている $n-1$ 単体 Δ_i, Δ_j が隣り合う $\Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$

- 任意の 2 単体 Δ に対して $\partial\Delta = l_1, l_2, l_3$
- $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset \Rightarrow \Delta_i \cap \Delta_j = l_k$
- 任意の 1 単体 l_k に対して $\partial l_k = \{p, q\}$

- 任意の 1 単体 l に対して、l を面とする 2 単体は高々2 つ。
- 任意の 0 単体 p に対して、p を面とする 1 単体は高々有限個。

このように図形を三角形によって分割していくことを三角形分割という。

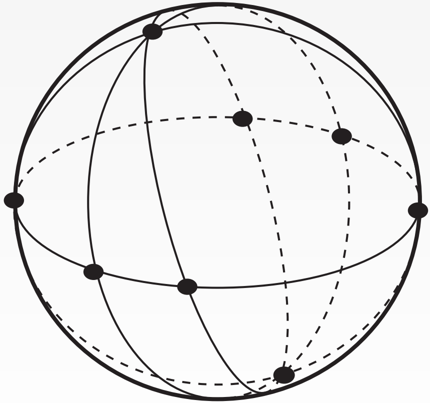
境界のない (閉) 多面体

任意の 1 単体 l を面とする 2 単体はちょうど 2 つ。

有限型多面体

多面体 Σ の各 n 単体は有限個である。

球面の三角形分割の例



分類の基準

分類したいもの

2 次元閉有限多面体全体

位相同型

多面体が X, Y が位相同型とは、X から Y への一対一な両連続写像があること。

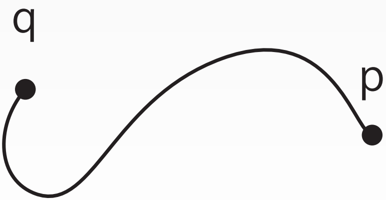
X と Y が位相同型であるとき、$X \cong Y$ とかく。

問題の定式化

問題

(弧状連結な) 境界のない有限多面体の位相同型類をすべて分類せよ。

弧状連結とは、任意の 2 つの頂点は辺と頂点を使って、一方から他方に線で結ぶことができることをいう。



分類していこう

まず、任意に、境界のない有限多面体 Σ を用意する。Σ は、有限個の 2 単体、1 単体、0 単体で三角形分割されている。

$$2\ \textbf{単体}: \{\Delta_i\}$$

$$1\ \textbf{単体}: \{l_j\}$$

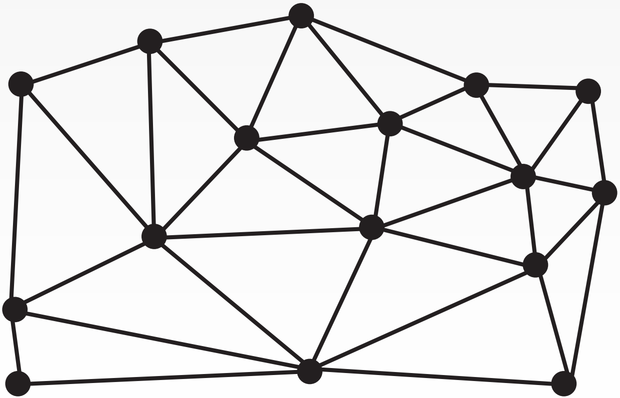
$$0\ \textbf{単体}: \{p_k\}$$

$$\Sigma = \cup\Delta_i \cup l_j \cup p_k$$

まずは1単体までの構造

$$\Sigma \supset \Sigma^{(1)} := \cup l_j \cup p_k$$

は、仮定から辺と頂点からなる弧状連結なグラフである。

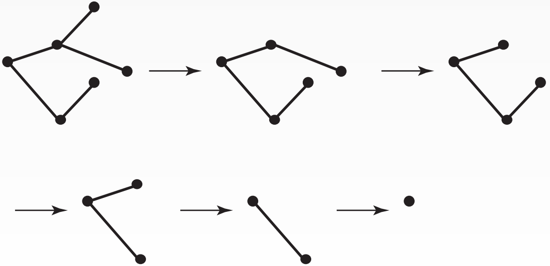


極大樹木の存在定理

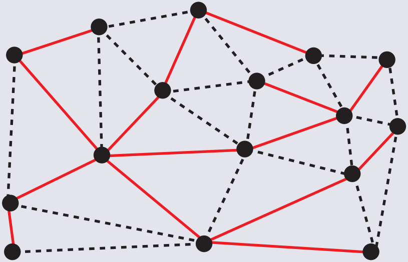
補題 1

任意の連結なグラフには、全ての頂点を通る連結で極大な部分樹木が存在する。

樹木とは、辺を縮ませることによって、一つの頂点に変形させることができるもののことをいう。

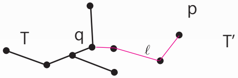


連結な極大樹木の例



証明

K を連結有限グラフとする。$T \subset K$ を任意の樹木とする。もし、$p \in K$ が T に含まれないとすると、p は T のある頂点と K の辺を辿ってパス ℓ で結ぶことができる。
ℓ が最初に T にぶつかる頂点を q とする。p から q までは T に属さない線分の和であり、それを T に繋げることで、p を含むある K の部分樹木 T' をつくることができる。
この操作の有限回後、K の全ての頂点を含む極大な樹木 $\mathbb{T}$ が完成する。 $\square$



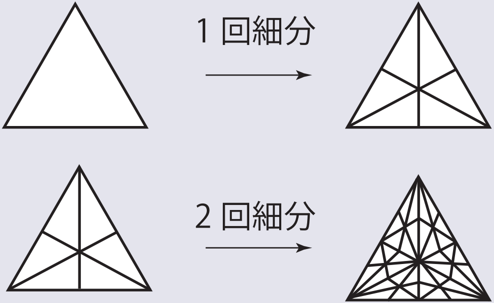
単体の細分

総合科目 III

担当：丹下 基生

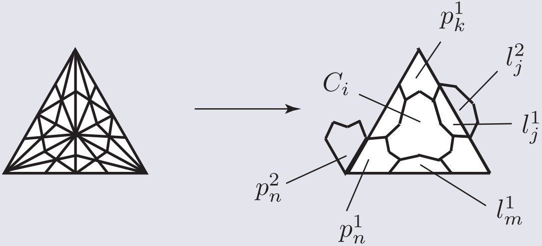
細分

三角形分割された単体複体を細分するとは、任意の 2 単体の辺の中点をとり、その中点と対角の頂点とを線分で結んで得られる単体分割のこと。



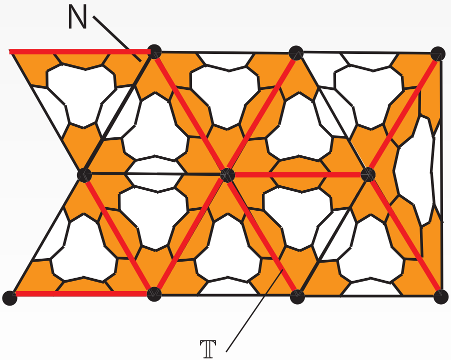
近傍

極大樹木を $\mathbb{T}$ とかく。2 回細分から、不必要な線を消すことで、各 2 単体に次のような区分けをする。



- C_i: 2 **単体に対応する。**
- l_i^1, l_i^2: 1 **単体に対応する。**
- $p_i^1, \cdots, p_i^k$: 0 **単体に対応する。**

$\mathbb{T}$ に含まれる 0,1 単体全てにおいて、この対応する区分けの全ての和集合を取ることで、$\mathbb{T}$ の近傍 N を作ることができる。



N は 2 次元円盤 D^2 に位相同型である。

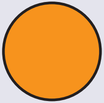
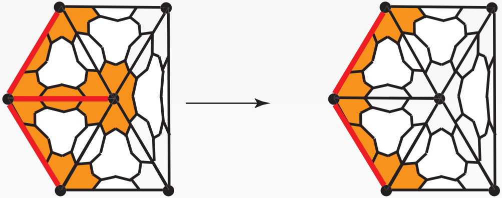
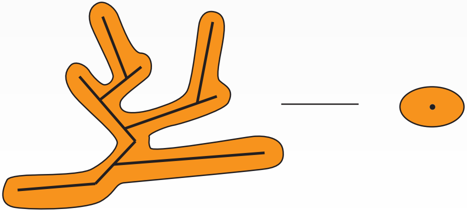


Figure: 2 次元円盤

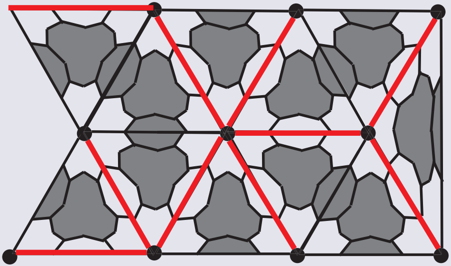
なぜなら樹木は、辺を縮めることで、頂点に変形できる。この変形は位相同型である。頂点の近傍は円盤なので、N は円盤 D^2 に位相同型である。



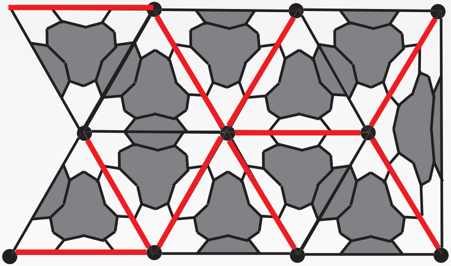


世界

$X = \Sigma - N$ とおいて、「世界」といおう。



注：X は 2 次元多面体 Σ から円盤を除いたものと考えられる。



- $\mathbb{T}$ は全ての 0-単体を含んでいる。
- $\mathbb{T}$ は全ての 2-単体を含んでいない。
- $\mathbb{T}$ は一部の 1-単体を含んでいる。

世界 X の構成：

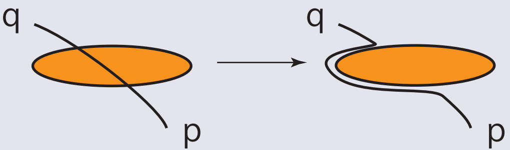
- $\{C_i\}$: 2 単体に対応する区分け
- $\{I_j^1, I_j^2\}$: 1 単体に対応する区分け

世界の連結性

世界は連結である。

証明

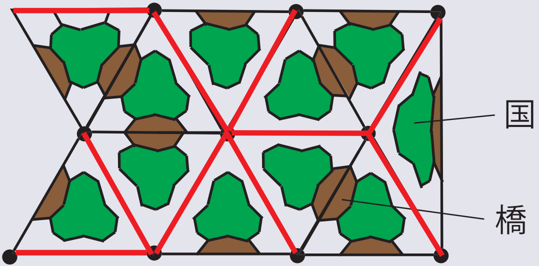
$p, q \in X$ をとる。この p, q は、Σ 上でパスで結べる。もし、N とぶつかれば、下のように回避する。



これを有限回行うことで、道は、X に存在するとしてよい。

国と橋

C_i を国といい、$l_i^1 \cup l_i^2$ を橋という。

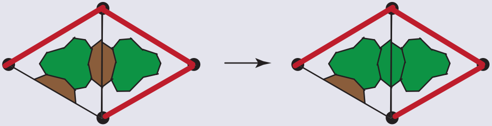


世界は国と橋からなる

征服定理

征服

下のように、ある国が橋を渡って、隣に国に攻め入り、国を制圧し、国を広げることを征服という。



定理 1 (征服定理)

全ての国を征服することができる。

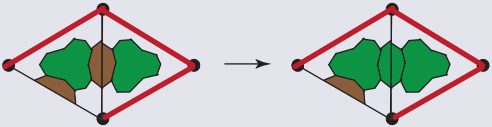
証明

もし、このようにして、全て征服できない国 C があったとする。世界 X 連結性より、C と、すでに征服された国の間にパス ℓ で結ぶことができる。この ℓ が最初にぶつかる国を D とすると、このパスに沿って、D から C まで国を征服することができる。

ゆえに、任意の国にまで征服することができる。 $\square$

征服が完了した国は、円盤と位相同型である。

征服する動きは、位相同型を与える。
下をよく観よ。



征服された国の後に世界に残ったものは....

世界 X の構成：

- $\{C_i\}$: 2 単体に対応する区分け
- $\{l_j^1, l_j^2\}$: 1 単体に対応する区分け

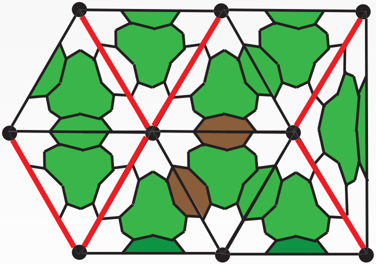
征服されて残った世界

残りの構成：

- $\{l_j^1, l_j^2\}$: 1 単体に対応する区分け

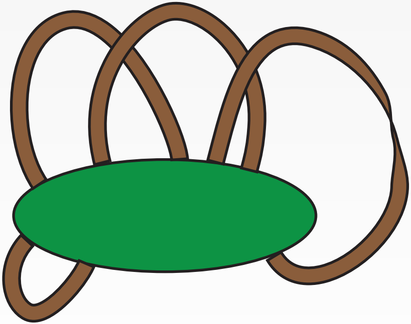
橋のみである。

征服された国を円盤だとすると、世界は、円盤に橋をいくつかかけたようなものになっている。



橋を引き伸ばして

世界の様子は次のようになる。



バンドの分類

バンド

バンドを b とするこのとき、b は２種類存在する。

- 奇数回だけ半ひねったもの
- 偶数回だけ半ひねりしたもの

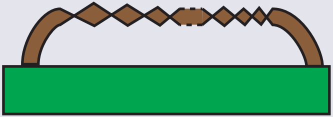
定理 2

これらの位相同型類は、以下と同じである。

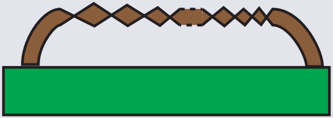
- 1 回だけ半ひねりしたもの
- ひねっていないもの

ひねり

バンドのひねりとは次のようなものである。



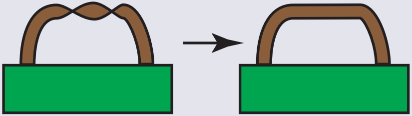
奇数回だけ半ひねりする



偶数回だけ半ひねりする

ひねりを解消しよう

解消操作

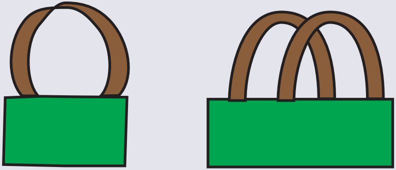


(証明)
バンドを切って、同じ位置ではり合わせよ。 □
つまり、2 回だけ半ひねりしたものはひねっていないものと同じである。
よって、ひねりの偶奇だけが問題である。

基本的なピースに分割しよう

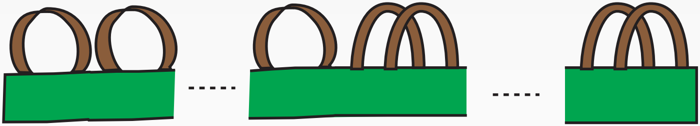
定理 3

世界 X はしたのようなピースをいくつか繋げた形をしている。左のバンドは、一回ひねっている。右のバンドは、どちらもひねりがない。



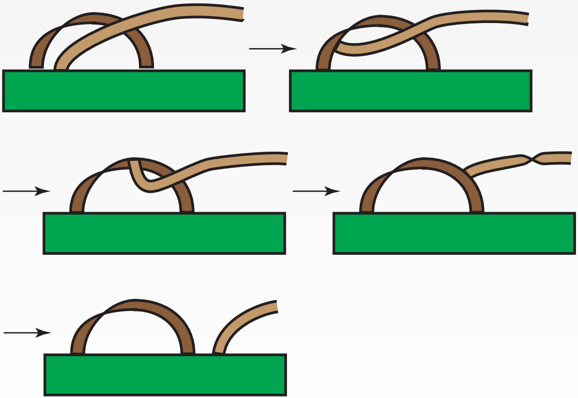
1 回ひねり　　0 回ひねりペア

つまり、このような形。



バンドスライドテクニック

(証明)



このような変形をすることで、半ひねりバンドの中にあるバンドを全て位相同型によって取り去ることができる。
結論。半ひねりバンドを 1 つ 1 つのピースに分解できた !!

0 ひねりバンドの出現

総合科目 III

担当：丹下基生

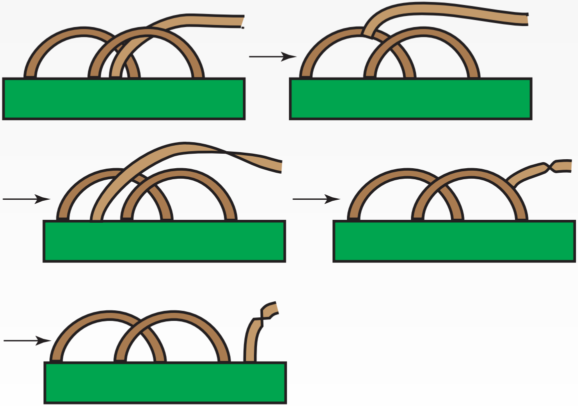
導入

分類開始

位相不変量

高次元多面体の分類

0 ひねりバンドの場合は、2 組ペアにすれば、ほかのものを全て分類することができる。



世界は...

任意の世界 X は、ある 0 以上の整数 p, q を使って

$$X_{p,q}$$

と表される

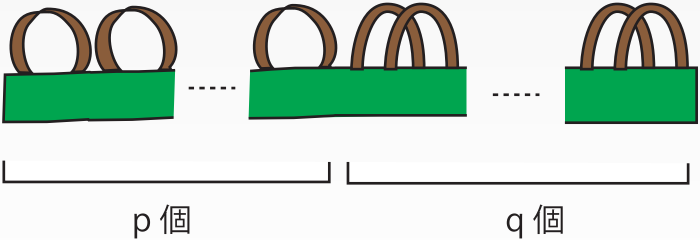
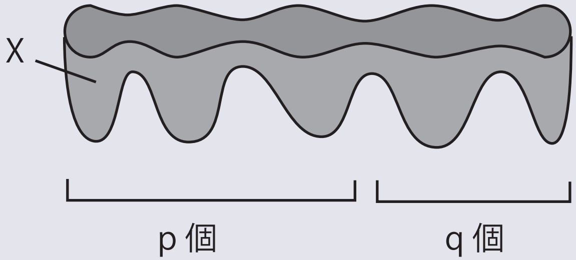


Figure: $X_{p,q}$

ふたをしよう

$X_{p,q}$ に N を使ってもう一度 Σ に戻そう。

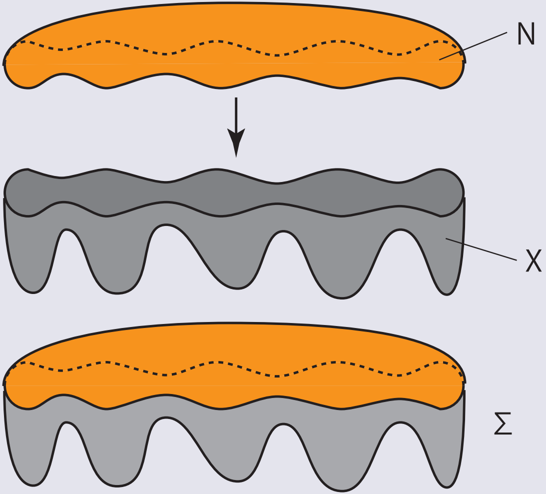
世界を書き直して



とする。

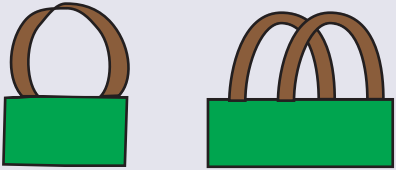
このぼこぼこの一つ一つが各ピースとする。

ふた



各ピース

各ピースにふたをすると何が得られるか？

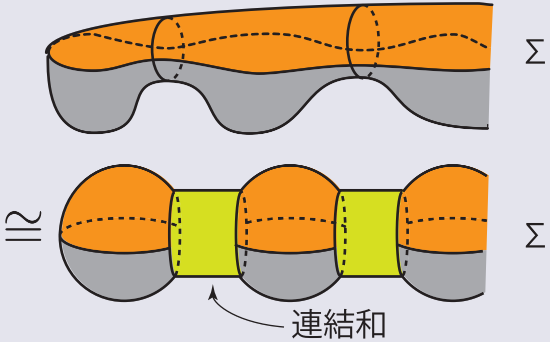


1 回ひねり　　0 回ひねりペア

連結和分解

Σ

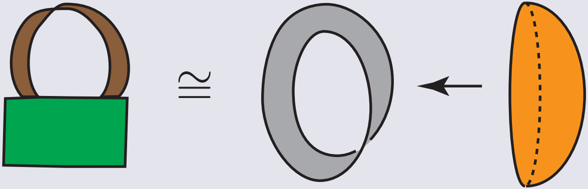
このようにチューブによって分解する。



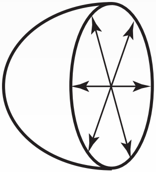
$X_1 \quad \# \quad X_2 \quad \# \quad X_3 \quad \cdots$

$\mathbb{R}P^2$

半ひねりバンドの方。

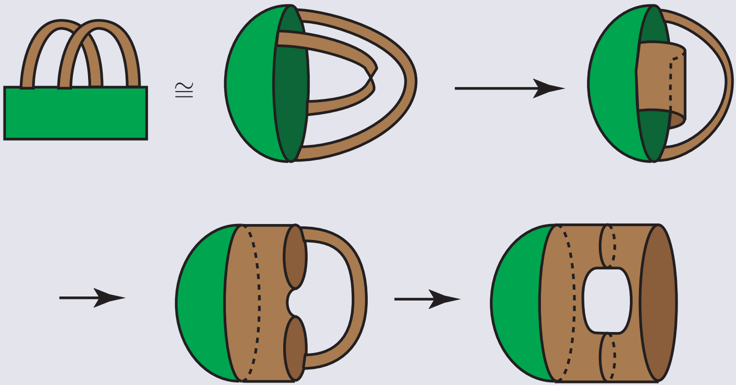


できるものを射影平面といい、$\mathbb{R}P^2$ とかく。



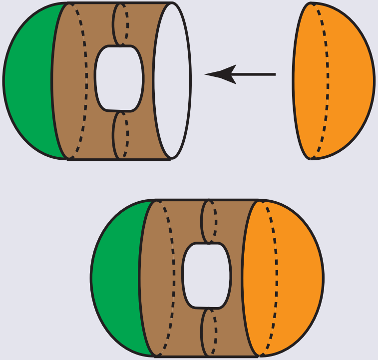
トーラスの構成

T^2



トーラスの構成

トーラス



できたものをトーラスといい、T^2 とかく。

Σ

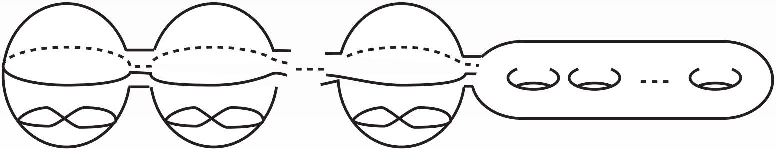
命題 1 (閉曲面の構造)

境界のない連結な 2 次元多面体 Σ は

$$\Sigma \cong \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2$$
$$\cong \Sigma_{p,q}$$

に位相同型である。

p **個の** $\mathbb{R}P^2$ **と** q **個の** T^2 **の連結和。**



表示の一意性

$\Sigma = \Sigma_{p,q}$ となる p, q は一意的に決まるか？

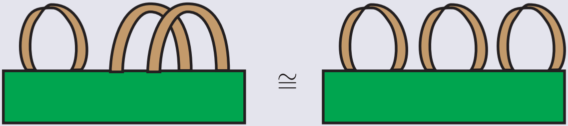
宿題

問題 1

バンドスライドてテクニックを用いて

$$\mathbb{R}P^2 \# T^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$

を証明せよ。



$$X_{1,1} \cong X_{3,0}$$

定理 4 (閉曲面の分類 (存在))

閉曲面 Σ は以下の 2 つのうち、どちらかに位相同型である。

$$\Sigma \cong \begin{cases} T^2 \# \cdots \# T^2 \\ \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \end{cases}$$

つまり、$X_{0,q}$ もしくは、$X_{p,0}$ のどちらかに位相同型である。

(証明)

$$X_{p,q} \cong \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2$$

とする。

$p > 0, q > 0$ **とすると、**

$$\begin{aligned}
X_{p,q} &\cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \# T^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2 \\
&\cong (\mathbb{R}P^2 \# T^2) \# \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2 \\
&\cong (\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) \# \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2 \\
&\cong \cdots \\
&\cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2
\end{aligned}$$

位相不変量

オイラー数

Σ を三角形分割された閉曲面とする。
v:三角形分割の 0-単体の数
e:三角形分割の 1-単体の数
f:三角形分割の 2-単体の数

$$\chi(\Sigma) = v - e + f$$

を Σ のオイラー数という。

定理 5

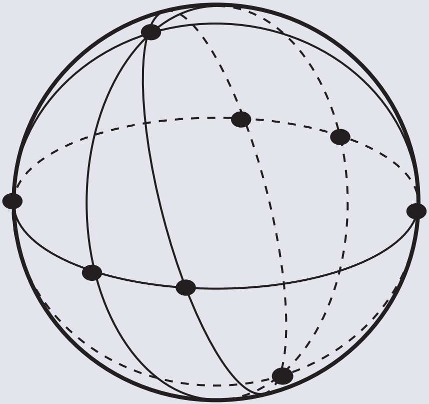
もし、Σ と Σ' が位相同型であれば、

$$\chi(\Sigma) \cong \chi(\Sigma')$$

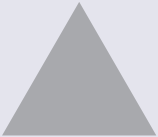
である。

とりあえず計算してみよう

$\chi(S^2) = 8 - 18 + 12 = 2$

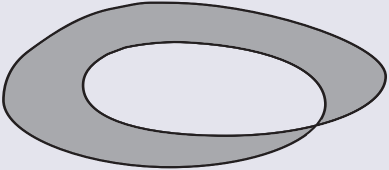


円盤 D^2

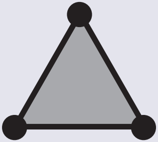


半ひねりバンドつき円盤を M とする

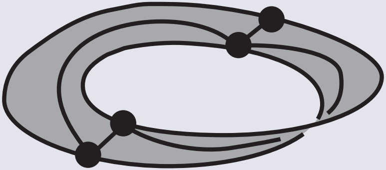
M



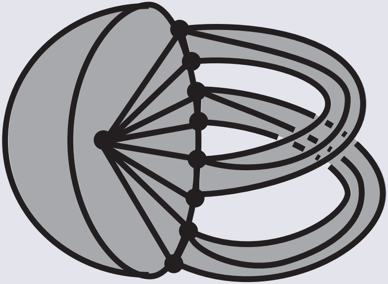
$\chi(D^2) = 3 - 3 + 1 = 1$



$\chi(M) = 4 - 8 + 4 = 0$



$\chi(T^2 - D^2) = 9 - 22 + 12 = -1$



$$\chi(D^2) = 1,\ \chi(M) = 0,\ \chi(T^2 - D^2) = -1$$

$$\chi(\mathbb{R}P^2) = \chi(M \cup D^2) = \chi(M) + \chi(D^2) = 0 + 1 = 1$$

$$\chi(T^2) = \chi(T^2 - D^2) + \chi(D^2) = -1 + 1 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\chi(X_{0,q}) &\cong \chi(T^2\#\cdots\#T^2)\\
&\cong \chi(T^2\#\cdots\#T^2-D^2)+\chi(T^2-D^2)\\
&\cong \chi(T^2\#\cdots\#T^2)-1-1\\
&\cong \chi(T^2\#\cdots\#T^2)-2\\
&\cong \chi(T^2)-2(q-1)=2-2q
\end{aligned}
$$

$$X_{0,q}\cong X_{0,q'}\Rightarrow \chi(X_{0,q})=\chi(X_{0,q'})\Rightarrow q=q'$$

連結和の数が違えば、位相同型ではない !!

$$\begin{aligned}
\chi(X_{p,0}) &\cong \chi(\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2)\\
&\cong \chi(\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2 - D^2) + \chi(\mathbb{R}P^2 - D^2)\\
&\cong \chi(\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2) - 1 + 0\\
&\cong \chi(\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2) - 1\\
&\cong \chi(\mathbb{R}P^2) - (p-1) = 2 - p
\end{aligned}$$

$$X_{p,0} \cong X_{p',0} \Rightarrow \chi(X_{p,0}) = \chi(X_{p',0}) \Rightarrow p = p'$$

連結和の数が違えば、位相同型ではない!!

定理 6 (閉曲面の分類 (一意性))

閉曲面 Σ は以下の 2 つのうち、どちらか、ただ "1 つ"に位相同型である。

$$\Sigma = \begin{cases} X_{0,q} = T^2 \# \cdots \# T^2 \\ X_{p,0} \cong \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \end{cases}$$

分類が完全に完了した。

高次元では...

このような分類は最近までなされていなかった。
3 **次元閉有限多面体 ···** 3 **次元閉多様体という**

サーストンの幾何化予想 (1982)

3 **次元閉多様体は連結和分解** (**トーラス和分解**) **によって、8 種類の幾何的多様体に分けることができる。**

W. **サーストン ···** (1982 **年フィールズ賞受賞：**Revolutionized study of topology in 2 and 3 dimensions, showing interplay between analysis, topology, and geometry. Contributed idea that a very large class of closed 3-manifolds carry a hyperbolic structure. **解析、トポロジー、幾何の間の相互関係を示す** 2,3 **次元の革新的な研究について。**)

幾何化予想の解決

ペレルマンの仕事 (2003)

サーストンの幾何化予想は正しい。
連結和により既約であり、トーラス和分解により既約な 3 **次元多様体をリッチフローにより計量を変形させると、必ず、サーストンの幾何構造を持つ計量に収束させることができる。**

G. **ペレルマン ···** (2006 **年フィールズ賞受賞** (**辞退**)**：** for his contributions to geometry and his revolutionary insights into the analytical and geometric structure of the Ricci flow. **リッチフローを用いた幾何解析への革新的な知見と幾何への業績。**)
この業績は、100 **年以上未解決だったポアンカレ予想** (2001 **年のミレニアム問題の** 1 **つ**) **を解決していた。**

4 次元では

4 次元では、分類は全くされていない。
$\pi_1(X) = e$：単連結という。

フリードマンの単連結な 4 次元多様体の分類 (1986)

単連結な閉 4 次元多様体の位相同型類は、2 次形式とカービージーベンマン不変量 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ によって分類される。

フリードマン ⋯ (1986 **年フィールズ賞受賞**：Developed new methods for topological analysis of four-manifolds. One of his results is a proof of the four-dimensional Poincaré Conjecture. **4 次元多様体の位相解析の新しい方法。この方法により、4 次元ポアンカレ予想の証明。**)

5 次元以上では

スメールの仕事 (1966 年)

単連結な高次元閉多様体の位相同型類は、ホモトピー不変量によって決まる。

スメール ･･･ (1966 **年フィールズ賞受賞：**Worked in differential topology where he proved the generalized Poincaré conjecture in dimension $n \geq 5$: Every closed, n-dimensional manifold homotopy-equivalent to the n-dimensional sphere is homeomorphic to it. Introduced the method of handle-bodies to solve this and related problems.